Theoretische Physik

Skript

Allgemeine Relativitätstheorie

Zusammenfassung der wichtigsten Definitionen und Rechnungen

Moritz Greif *

25. April 2012

zur Ergänzung und Zusammenfassung der Vorlesung im SS2011
Goethe Universität Frankfurt am Main
Hinweise bitte an moritzgreif@gmx.net

verwendete Literatur:

(1) Adler,Bazin,Schiffer: Introduction to General Relativity, McGraw-Hill, USA 1975
(2) Ray d'Inverno: Einführung in die Relativitätstheorie, WILEY-VCH, Weinheim 2009
(3) Wolfgang Kühnel: Differentialgeometrie, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden 2010

*frei nach der Vorlesung von Prof.Dr. Carsten Greiner, Rainer Stiele, Till Böckel

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Nichteuklidische Geometrie

1.1.1 Fläche im 3-dim Raum

Wir betrachten als einführendes Beispiel eine Fläche im 3-dimensionalen Raum, die wir als Funktion von 2 Parametern u_1, u_2 darstellen. Die u_1, u_2 sind dabei die Koordinaten der Fläche:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(u_1, u_2) \\ x_2 &= \varphi_2(u_1, u_2) \\ x_3 &= \varphi_3(u_1, u_2) \end{aligned}$$

Der normal bekannte Abstand zwischen zwei Punkten A und B auf der Fläche wäre $d_{AB} = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$. Wir versuchen nun, den Abstand d_{AB} durch die neuen Koordinaten u_1 und u_2 auszudrücken.

$$d_{AB}^2 = ds_{AB}^2 = \sum_{i,k=1}^{2} \left(\sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_k} \right) du_i du_k = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}(u_1, u_2) du_i du_k \tag{1}$$

Die dabei definierte Größe $g_{ik} = g_{ki}$ bezeichnen wir als *metrischen Tensor.*

1.1.2 Koordinatentransformation

Nun wollen wir die Koordinaten u_1, u_2 durch andere Koordinaten v_1, v_2 ersetzen. Dabei sollen die neuen Koordianten differenziebare Funktionen der alten sein, und umgekehrt:

$$\begin{aligned} u_1(v_1, v_2)\ ,\ u_2(v_1, v_2) \\ v_1(u_1, u_2)\ ,\ v_2(u_1, u_2) \end{aligned}$$

Man erhält das totale Differential:

$$du_i = \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial v_l} dv_l \tag{2}$$

Das kann man nun in die Gl.(1) einsetzen, und erhält:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}(u_1, u_2) du_i du_k = \sum_{i,k=1}^{2} \sum_{l,m=1}^{2} g_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial v_l} \frac{\partial u_k}{\partial v_m} dv_l dv_m \equiv \sum_{l,m=1}^{2} \widetilde{g}_{lm} dv_l dv_m \tag{3}$$

wobei wir einen neuen metrischen Tensor $\widetilde{g}_{lm}$ im neuen Koordinatensystem definiert haben. Man liest ab:

$$g_{ik} = \sum_{l,m=1}^{2} \widetilde{g}_{lm} \frac{\partial v_l}{\partial u_i} \frac{\partial v_m}{\partial u_k}$$

$$\widetilde{g}_{lm} = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial v_l} \frac{\partial u_k}{\partial v_m}$$

Daran erkennt man $g_{ik} = g_{ki}$ und $\widetilde{g}_{lm} = \widetilde{g}_{ml}$, das heißt, der metrische Tensor ist in allen Koordinatensystemen symmetrisch.

1.1.3 Anwendung: Geschwindigkeit in Klassischer Mechanik

Wir betrachten ein freies Teilchen, dass sich mit der Geschwindigkeit v bewegt. Wir untersuchen nun die Bewegungsgleichung des Teilchens in der allgemeineren Geometrie, in der der Abstand im Allgemeinen nicht-euklidisch ist. Die Lagrange-Funktion des Teilchens lautet $\mathscr{L} = \frac{1}{2}mv^2$. Dabei ist

$$v^2 = \left|\frac{ds}{dt}\right|^2 = \sum_{i,k} g_{ik} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \sum_{i,k} g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k$$

Wir führen eine neue Notation ein:

Definition 1.1.

$$g_{ik|l} \equiv \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \tag{4}$$

Die Bewegungsgleichung lautet ja $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^l}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^l} = 0$. Wir berechnen die Terme unter Benutzung der Einsteinschen Summenkonvention.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^l} &= \frac{1}{2}m\,(g_{ik}\,\dot{x}^i\,\delta_l^k + g_{ik}\,\dot{x}^k\,\delta_l^i) = m\,g_{lk}\,\dot{x}^k \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^l} &= m\,g_{lk|i}\,\dot{x}^i\dot{x}^k + m\,g_{lk}\,\ddot{x}^k \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^l} &= \frac{1}{2}m\,g_{ik|l}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k
\end{aligned}$$

woraus man die Bewegungsgleichung erhält:

$$\ddot{x}^h + \frac{1}{2}\sum_l g^{hl}[g_{lk|i} + g_{li|k} - g_{ik|l}]\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k = \ddot{x}^h + \Gamma^h{}_{ki}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k = 0 \tag{5}$$

Dabei haben wir das Christoffel-Symbol 2.Art definiert:

Definition 1.2 (Christoffel-Symbol 2.Art)**.** Als „Christoffel-Symbol“,“metrischen Zusammenhang“, „affiner Zusammenhang“ oder nur „Zusammenhang“ bezeichnet man die oft auftauchende Größe:

$$\Gamma^h{}_{ki} \equiv \frac{1}{2}\sum_l g^{hl}[g_{lk|i} + g_{li|k} - g_{ik|l}]$$

Wenn man kein Potential vorliegen hat, ist die Geschwindigkeit eines Teilchens konstant. Damit kann man $\frac{ds}{v} = dt$ in die obige Gleichung einsetzen und erhält, nach Division durch v^2:

Wichtige Gleichung 1.3 (metrische Geodäte)**.** *Die Gleichung beschreibt die Bahn eines freien Teilchens:*

$$\frac{d^2\, x^h}{ds^2} + \Gamma^h_{ki} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{6}$$

1.1.4 Der freie Fall

Wir betrachten ein frei fallendes Teilchen in einem Gravitationsfeld. Das lokal mitbewegte Koordinatensystem sei ξ^α. Nach den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie gilt für das Teilchen

$$\frac{d^2\, \xi^\alpha}{d\, \tau^2} = 0 \tag{7}$$

mit der Eigenzeit τ für die ja gilt $ds^2 = c^2 d\tau^2 = (d\xi^0)^2 - (d\vec{\xi})^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha\, d\xi^\beta$. Wir werden nun Gl.(7) etwas umformen, um wieder eine Bewegungsgleichung für ein Teilchen im Gravitationsfeld zu erhalten.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2\, \xi^\alpha}{d\, \tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\ddot{x}^\mu \\
&= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\ddot{x}^\mu + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\dot{x}^\nu \dot{x}^\mu \\
0 &= \delta^\lambda_\mu \ddot{x}^\mu + \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}}_{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu \qquad (8)
\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile mit $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ multiplizert haben, und über α summiert. Man erhält nach Ausführen des Kronecker-Deltas:

Wichtige Gleichung 1.4 (Geodätenbewegung)**.**

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{9}$$

Dies ist die Gleichung, die die Bewegung eines Teilchens im Gravitationsfeld beschreibt.

Wie man erkennt, wurde das $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ benutzt, diesmal in einer etwas anderen Form. Dies ist jedoch gültig, wie man im folgenden sieht.

Satz 1.5.

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{1}{2}\sum_l g^{\lambda l}[g_{l\mu|\nu} + g_{l\nu|\mu} - g_{\nu\mu|l}] \tag{10}$$

Beweis. Wir nehmen folgendes an:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\ ,\ \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu} \tag{11}$$

und berechnen:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\lambda}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\lambda\partial x^\nu} \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2\xi^\sigma}{\partial x^\mu\partial x^\nu} = \delta^\sigma_\alpha\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu} = \underbrace{\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}}_{\delta^\sigma_\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu} = \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{13}$$

Gl.(13) wird nun in Gl.(12) eingesetzt:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}\, g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\, g_{\sigma\mu} \tag{14}$$

Durch Umbenenung der Indizes $\mu \leftrightarrow \lambda$ in Gl.(14) erhält man

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\sigma_{\lambda\lambda}\, g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\, g_{\sigma\lambda} \tag{15}$$

Durch Umbenenung der Indizes $\lambda \leftrightarrow \nu$ in Gl.(14) erhält man

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\, g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\nu}\, g_{\sigma\mu} \tag{16}$$

Nun berechnet man (14) + (15) − (16), und multipliziert mit $\frac{1}{2}g^{\nu\sigma}$:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu|\lambda} + g_{\lambda\nu|\mu} - g_{\mu\lambda|\nu} &= 2\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} \\ \Longleftrightarrow\ \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} &= \frac{1}{2}\sum_l g^{\nu\sigma}[g_{\mu\nu|\lambda} + g_{\lambda\nu|\mu} - g_{\mu\lambda|\nu}] \end{aligned} \tag{17}$$

Durch eventuelle Umbennenung der internen Idizes ergibt sich die Behauptung. □

Wir betrachten nun den Newtonschen Limes des freien Falls, um die allgemeine Theorie auf den bekannten Spezialfall zurückzuführen. Annahmen:

$$\begin{aligned} &|v_i| << c \\ &cd\tau = cdt \\ &\dot{x}^0 = \frac{dct}{dc\tau} = 1 \\ &\dot{x}^i \approx v^i \end{aligned}$$

Weiterhin benutzen wir, dass sich die Metrik $g_{\mu\nu}$ nicht viel von der Minkowski-Metrik unterscheidet:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{18}$$

wobei $|h_{\mu\nu}| << 1$ sein soll, und $g_{\mu\nu}$ als konstant betrachtet wird. Wir betrachten nur kleine Geschwindigkeiten, daher ist $u^\mu = \gamma(c, v^i) \approx (c, v^i)$:

$$\frac{dx^i}{cdt} = \frac{v_i}{c} \tag{19}$$

Unser Koordinatensystem sei $(x^0, x^i) = (ct, x^1, x^2, x^3)$. Wir benutzen nur die räumlichen Indizes (da $\Gamma^0_{00} \approx 0$ wie man leicht sieht, vernachlässigen die auftretenden $\frac{v}{c}$ und berechnen so die Gleichung 9 der zeitartigen Geodäten weiter:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \\ &\frac{d^2x^i}{c^2dt^2} = -\Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{cdt}\frac{dx^\nu}{cdt} = -\Gamma^i_{00}\left(\frac{dx^0}{dct}\right)^2 - 2\Gamma^i_{0j}\frac{dx^j}{cdt} - \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{cdt}\frac{dx^l}{cdt} \\ \hookrightarrow\quad &\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\Gamma^i_{00}\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2 = -\Gamma^i_{00}\,c^2 \end{aligned} \tag{20}$$

Da $g_{\mu\nu}$ als zeitlich annähernd konstant betrachtet wird, ist $\left|\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial ct}\right| << \left|\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i}\right|$. Wir berechnen aus Gl.(18):

$$\frac{\partial(\overbrace{\eta_{00}}^{=1} + h_{00})}{\partial x^k} = \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \tag{21}$$

Damit erhält man

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}g^{\nu i}\left(\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial ct} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial ct} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}\right) \approx -\frac{1}{2}g^{ki}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^k} \approx -\frac{1}{2}\eta^{ki}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} = -\frac{1}{2}(-\delta^k_i)\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \tag{22}$$

Also

$$\Gamma^i_{00} \approx \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \tag{23}$$

Damit wird Gl.(20)

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{00}c^2 = -\frac{1}{2}c^2\,\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \equiv -\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi_{grav}(\vec{r}) = \frac{(\vec{F_G})_i}{m} = g \cdot \vec{e}_i \tag{24}$$

Das ist genau das 2. Newtonsche Axiom. Eine andere Darstellung ist:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \approx -\frac{c^2}{2}\vec{\nabla}h_{00} \equiv -\vec{\nabla}\Phi$$

mit

$$h_{00}(\vec{r}) = g_{00} - 1 \approx \frac{2\Phi}{c^2} \tag{25}$$

Damit gilt auch

$$\Gamma^i_{00} \approx \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$$

Man kann Gl.(24) mit dem Newtonschen Gesetz $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g}$ vergleichen, und erkennt die Analogie von $-\Gamma^i_{00}c^2$ und der Schwerebeschleunigung eines fallenden Systems, die im Ruhesystem (auf der Erde) gemessen ist. Man kann noch untersuchen, ob die Näherung für $g_{\mu\nu}$ gerechtfertigt ist, in dem man untersucht, ob h_{00} klein ist:

$$h_{00}(R_E) = \frac{2G\,M_E}{c^2\,R_E} = 1,4 \cdot 10^{-9} << 1 \tag{26}$$

Die Geschwindigkeiten auf der Erde sind auch höchstens so gross wie die Fluchtgeschwindigkeit $v_{Flucht} = 11,2\frac{km}{s} << c$.

1.2 Geodätische Linie

1.2.1 Maximierungsproblem

Im normalen euklidischen Raum ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade, die durch die beiden Punkte verläuft. Im Minkoskiraum ist dies jedoch nicht so. Der Abstand zwischen zwei Punkten in der Minkowski-Raumzeit ist $\Delta S_{AB} = c\Delta\tau_{AB} = \sqrt{(\Delta\xi^0)^2 - (\Delta\xi^1)^2}$

Satz 1.6. *A,B,C seine Punkte in der Raumzeit. (Wir betrachten der Einfachheit halber nur eine Raumrichtung). Der Abstand zwischen zwei Punkten sei ΔS_{AB}. Es gilt:*

$$\Delta S_{AB} \geq \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB} \tag{27}$$

Beweis. Auf dem direkten Weg von A nach B im Minkowski-Diagramm habe ein Teilchen die 4-Geschwindigkeit $u^\mu_{AB} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau_{AB}}$. Der Raumzeit-Abstand zwischen A und B ist dann

$$u^\mu_{AB}\,\Delta\tau_{AB} = \Delta S_{AB} = (\Delta\xi^0, \Delta\xi^1, 0, 0) \tag{28}$$

Unter Benutzung von $u_\mu u^\mu = 1$ (eigentlich c^2, hier auf eins normiert) berechnen wir:

$$\begin{aligned} u^\mu_{AC}\,c\,\Delta\tau_{AC} + u^\mu_{CB}\,c\,\Delta\tau_{CB} &= u^\mu_{AB}\,c\,\Delta\tau_{AB} \qquad \text{(quadrieren)} \\ \Delta\tau^2_{AC} + \Delta\tau^2_{CB} + 2u^\mu_{AC}\,u_{CB,\mu}\,\Delta\tau_{AC}\Delta\tau_{CB} &= \Delta\tau^2_{AB} \end{aligned}$$

Wenn man jetzt noch zeigt, dass $u^\mu_{AC}\,u_{CB,\mu} \geq 1$ ist, wäre

$$\begin{aligned} \Delta\tau^2_{AC} + \Delta\tau^2_{CB} + 2\Delta\tau_{AC}\Delta\tau_{CB} &\leq \Delta\tau^2_{AB} \\ \iff \quad (\Delta\tau_{AC} + \Delta\tau_{CB})^2 &\leq (\Delta\tau_{AB})^2 \end{aligned} \tag{29}$$

Dazu benutzen wir

$$u^\mu_{AC} = \gamma_1\left(1, \frac{\vec{v_1}}{c}\right) \;;\; u^\mu_{CB} = \gamma_2\left(1, \frac{\vec{v_2}}{c}\right) \tag{30}$$

und berechnen

$$u^\mu_{AC} \cdot u^\mu_{CB,\mu} = \gamma_1\gamma_2\left(1 - \frac{v_1\,v_2}{c^2}\right) \geq \gamma_1\gamma_2\left(1 - \frac{v_1\,v_2}{c^2}\right)^2 \overset{!}{\geq} 1 \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad \left(1 - \frac{v_1\,v_2}{c^2}\right)^2 &\overset{!}{\geq} \frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma_2} = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right) \\ \iff \quad 1 - \frac{2v_1\,v_2}{c^2} + \frac{v_1^2\,v_2^2}{c^4} &\overset{!}{\geq} 1 - \frac{v_2^2}{c^4} - \frac{v_2^2}{c^4} + \frac{v_1^2\,v_2^2}{c^4} \\ \implies \quad \frac{v_1^2}{c^4} + \frac{v_2^2}{c^4} - \frac{2v_1\,v_2}{c^4} &= \frac{1}{c^2}(v_1 - v_2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

□

Das bedeutet, man muss bei der Variation des Raumzeit-Abstandes maximieren. Der Grund ist die Pseudometrik.

1.2.2 Variation des Raum-Zeit-Abstands

Wir wollen eine Variation des Raum-Zeit Abstandes durchführen, um die stationäre Kurve zu erhalten. Diese wird wieder die Geodäte in einer allgemeinen Geometrie sein. Dazu varriert man ein Funktional τ_{AB}.

$$\delta\tau_{AB} = \delta\int\limits_{P_A}^{P_B} c d\tau = \delta\int\limits_{P_A}^{P_B} c\frac{d\tau}{dp}\,dp = \delta\int\limits_{P_A}^{P_B}\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp}} = 0 \tag{32}$$

Die Randbedingungen sind:

$$x^\mu(P_A) = A^\mu\ ;\ x^\mu(P_B) = B^\mu \tag{33}$$

Die Randbedinungen in der Variation sind dann bzw.

$$\delta x^\mu(P_A) = \delta x^\mu(P_B) = 0 \tag{34}$$

Man findet damit:

Wichtige Gleichung 1.7. *Die stationäre Kurve in der Raumzeit ist durch folgende Gleichung beschrieben:*

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0 \tag{35}$$

2 Differentialgeometrie

Die allgemeine Relativitätstheorie bedient sich in hohem Maße des mathematischen Gebiets der Differentialgeometrie. Hier sollen nun einige Größen mathematisch definiert werden, um die Hintergründe der von den Physikern benutzten Mathematik zu beleuchten.

2.1 Mannigfaltigkeiten, Krümmung, Schnittkrümmung und Metrik

Die allgemeine Relativiätstheorie beschreibt dir Krümmung der Raumzeit durch Masse bzw. Energie. Um die Krümmung zu definieren gibt es ein aufwendiges mathematisches Konstrukt. Dabei geht man wie folgt vor:

1. Anschauliche Beschreibung von Tangenten und Krümmungen an Kurven im $\mathbb{R}^3$

2. Definition von 2-dimensionalen Flächenstücken im $\mathbb{R}^3$ (3-dimensionaler euklidischer Raum), mit im Wesentlichen Fundamentalformen, Hauptkrümmungen und der Gaußschen Krümmung.

3. Übertragung der vorherigen Flächendefinitionen auf (n)-dimensionale Flächenstücke (n Parameter auf der Fläche) und einen $(n+1)$-dimensionalen umgebenden euklidischen Raum. Man nennt diese Flächen dann *Hyperflächen*. Wichig ist hier die Definition der Krümmung einer Hyperfläche.

4. Beschreibung der **inneren Geometrie** von Hyperflächen. Interessant ist nun, welche Eigenschaften einer Hyperfläche man definieren kann, wenn man keinen umgebenden Raum mehr betrachtet. Anders ausgedrückt: welche Eigenschaften eines Raumes könnten intelligente Lebewesen messen, wenn sie nicht wüssten, dass der Raum in dem sie leben, in einen höherdimensionalen Raum eingebettet ist. (Bsp.: Intelligente Ameise auf Kugeloberfläche). Die innere Geometrie von Flächen kann man in beliebigen Dimensionen betrachten. Hier kann man kovariante Ableitungen, Christoffelsymbole, Vektorfelder, Parallelverschiebung und geodätische Linien anschauen. Wichtige Sätze sind das Theorema Egregium und der Satz von Gauß-Bonnet. Der Krümmungstensor wird eingeführt.

5. Jetzt kann man die **Riemannsche Mannigfaltigkeit** definieren, und die Ergebnisse der inneren Geometrie benutzen (jetzt global). Man kann hier auch ein Krümmung analog zu der Krümmung von Flächenstücken definieren. Analog zu der Krümmung eines 2-dimensionalen Flächenstücks kann man eine Krümmung für 2-dimensionale Riemmannsche Mannigfaltigkeiten definieren, für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten wird die Krümmung als Schnittkrümmung bezeichnet (Krümmung der Mannigfaltigkeit in Durchschnitt mit Ebene). Der Krümmungstensor kann dann durch Kenntnis aller Schnittkrümmungen zusammengesetzt werden. Hier können Tensoren, Riemannsche Zusammenhänge, etc. streng mathematisch definiert werden.

Hier werden nun nur die wichtigsten Schritte aufgeführt, um ein konsistentes Bild der benötigten Differentialgeometrie zu erhalten.

2.2 Flächenstücke im $\mathbb{R}^3$

Definition 2.1 (Immersion)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ sei offene Teilmenge. Es sei $k \leq n$. Eine Immersion ist eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, dessen Funktionalmatrix $D\varphi \in \mathbb{R}^{n,k}$ in jedem Punkt $x \in \Omega$ maximal möglichen Rang hat. Das bedeutet auch

- Die Funktionalmatrix ist stets eine injektive Abbildung, $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto D\varphi \cdot v$
- Bei $k = 0$ ist jede Immersion eine reguläre, parametrisierte Kurve mit offenem Definitionsbereich.
- $rangD\varphi = k$ weil $k \leq n$. Die k Spaltenvektoren sind linear unabhängig.

Definition 2.2 (Flächenstück)**.** $U \subset \mathbb{R}^2$ sei offene Menge. Eine Immersion

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u_1, u_2) \mapsto f(u_1, u_2)$$

heißt *parametrisiertes Flächenstück.*

- f heißt auch *Parametrisierung*
- Die Elemente von U heißen *Parameter*
- Die Bilder von f heißen *Punkte*
- Ein *Hyperflächenstück* ist ein Flächenstück im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit offenem Definitionsbereich $U \subset \mathbb{R}^n$,
$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

Definition 2.3 (Tangentialebenen, Tangentialräume)**.** $u \subset U,\ f : U \to \mathbb{R}^3,\ p = f(u)$.

- Tangentialraum von U in u: $T_uU = \{u\} \times \mathbb{R}^2$
- Tangentialraum von $\mathbb{R}^3$ in p: $T_p\mathbb{R}^3 = \{p\} \times \mathbb{R}^3$
- **Tangentialebene** von f in p: $T_uf := Df|_u(T_uU) \subset T_{f(u)}\mathbb{R}^3$. Die Elemente der Tangentialebene heißen Tangentialvektoren.
- Normalenraum von f in p: $T_uf \oplus \perp_u f = T_p\mathbb{R}^3$. Die Elemente des Normalenraumes heißen Normalenvektoren.

Eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ kann lokal als Flächenstück beschrieben werden.

Definition 2.4 (erste Fundamentalform)**.** Die erste Fundamentalform I eines Flächenstücks ist die Einschränkung des euklidischen Skalarproduktes auf alle Tangentialebenen $T_u f$. Also für zwei Tangentialvektoren $X, Y \in T_u f$:

$$I(X,Y) \equiv \langle X, Y \rangle$$

Dies ist eine Beschreibung ohne Parametrisierung. Benutzt man eine Parametrisierung (u_1, u_2), so ist die Erste Fundamentalform:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_2}, \frac{\partial f}{\partial u_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_2}, \frac{\partial f}{\partial u_2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

Definition 2.5 (Gauß-Abbildung)**.** $U \subset \mathbb{R}^2, \quad f : U \to \mathbb{R}^3$ sei ein Flächenstück. Die Gauß-Abbildung ist dann

$$\nu : U \to S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \qquad \nu(u_1, u_2) \equiv \frac{\frac{\partial f}{\partial u_1} \times \frac{\partial f}{\partial u_2}}{\| \frac{\partial f}{\partial u_1} \times \frac{\partial f}{\partial u_2} \|}$$

Definition 2.6 (Weingartenabbildung)**.** Die Weingartenabbildung ordnet Punkten auf Flächen einen Vektor zu, der mit dem Normalenvektor zu tun hat. Sie ist punktweise definiert als

$$L_u \equiv -(D\nu|_u) \circ (Df|_u)^{-1} : T_u f \to T_u f$$

Also die Weingartenabbildung macht aus einem Tangentialvektor einer Fläche, die negative Ableitung der Gauß-Abbildung nach dem selben Parameter, nach dem auch die Fläche abgeleitet wurde, um den Tangentialvektor zu erhalten: $L\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right) = -\frac{\partial \nu}{\partial u_i}$. Für einen Tangentialvektor beschreibt die Weingartenabbildung des Vektors die Änderung der Flächennormalen an dem Punkt in der Richtung des Vektors[1]. Man kann die Weingartenabbildung als Matrix auffassen:

$$L\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right) = h_i^k \frac{\partial f}{\partial u_k}$$

Die Weingartenabbildung ist Selbstadjungiert, da

$$I\left(L\frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right) = \left\langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}, \nu \right\rangle = I\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}, L\frac{\partial f}{\partial u_j}\right)$$

Definition 2.7 (Zweite Fundamentalform)**.** Die zweite Fundamentalform ist für Tangentialvektoren X,Y definiert als

$$II(X,Y) \equiv I(LX, Y)$$

Setzt man die Funktion $f : U \to \mathbb{R}^3, f(u_1,u_2) := (x(u_1,u_2), y(u_1,u_2), z(u_1,u_2))$, so bedeutet die zweite Fundamentalform

$$h_{ij} \equiv II\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_i}\right) = \left\langle L\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right), \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i} \right\rangle$$

[1] vgl. `http://de.wikipedia.org/wiki/Weingartenabbildung`

Der letzte Schritt ergibt sich aus der Kettenregel, unter Beachtung, dass $\left\langle \nu, \frac{\partial f}{\partial u_i} \right\rangle = 0$. Rechne dazu $\frac{\partial}{\partial u_j} \left\langle \nu, \frac{\partial f}{\partial u_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle + \left\langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i} \right\rangle$. Eine weitere wichtige Relation ist der Zusammenhang der Matrixelemente von **Zweiter Fundamentalform, Weingartenabbildung und Erster Fundamentalform**:

$$h_{ij} \equiv II\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_i}\right) = \left\langle L\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right), \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle h_i^k \frac{\partial f}{\partial u_k}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle = h_i^k \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_k}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle = h_i^k g_{kj} \tag{36}$$

Man kann also die zweite Fundamentalform als Matrix mit den Koeffizienten h_{ij} und die erste Fundamentalform als solche mit g_{ij} auffassen.
Mit der Matrixformulierung (Die Matrix (a_{ij}) hat die Elemente a_{ij}), kann man die Weingartenabbildung als Quotient von zweiter und erster Fundamentalform ausdrücken:

$$h_{ij} = h_i^k g_{kj} \quad | \cdot g_{kj}^{-1}$$

Damit gilt für die Weingartenabbildung $L = \left(h_i^k\right)$ mit $h_i^k = \frac{h_{ij}}{g_{kj}} = h_{ij} g^{kj}$.

2.3 Krümmung von Flächen

Die Krümmung einer parametrisierten Kurve ist die Änderung des Tangentenvektors, also die zweifache Ableitung nach dem Parameter. Für die Krümmung einer Fläche benutzt man ein ähnliches Prinzip. Man betrachtet eine Fläche, in der eine Kurve $c(t)$ verläuft. Die Krümmung dieser Kurve ist $\frac{d^2 c(t)}{dt^2}$ (wieder ein Vektor). Die Kurve soll durch einen Punkt p auf der Fläche laufen, mit

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_p = c'(p) = X$$

Nun spaltet man den Krümmungsvektor $c''(p)$ in einen Tangential und einen Normalanteil auf. Der Normalanteil ist dabei:

$$\langle c'', \nu \rangle \nu = \left\langle \frac{d^2 c}{dt^2}, \nu \right\rangle \nu = -\left\langle c', \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\rangle \nu = \langle X, LX \rangle \nu = II(X, X)\nu$$

Da der Normalenvektor ν ja normiert ist, und $LX = L(\frac{\partial c}{\partial t}) = -\frac{\partial \nu}{\partial t}$. Der Normalanteil hängt nur vom Tangentialvektor X im Punkt p ab, und nicht von der Kurve (Satz von Meusnier).

Definition 2.8 (Normalkrümmung)**.**

$$II(X, X) \equiv \kappa_\nu$$

heißt Normalkrümmung.

Im folgenden interessant sind die extremalen Normalkrümmungen.

Definition 2.9 (Hauptkrümmung)**.** $X \subset T_u f$ sei ein Einheitstangentenvektor, also $I(X, X) = 1$. X heißt Hauptkrümmungsrichtung von f, wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- II(X,X) hat einen stationären Wert unter der Variation aller X mit I(X,X)=1
- X ist Eigenvektor der Weingartenabbildung L, also $LX = \lambda X$. Der zugehörige Eigenwert λ heißt Hauptkrümmung.

Bei einer 2-dimensionalen Fläche gibt es zwei Hauptkrümmungen $\kappa_1,\ \kappa_2$, diese sind die maximale und die minimale Normalkrümmung. Die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen $X_1,\ X_2$ stehen senkrecht aufeinander, da $\kappa_1 \langle X_1, X_2\rangle = \langle LX_1, X_2\rangle = \langle X_1, LX_2\rangle = \kappa_2 \langle X_1, X_2\rangle$.

Definition 2.10 (Gaußsche Krümmung)**.** Die Determinante der Weingartenabbildung $K = \det(L) = \kappa_1\kappa_2$ heißt Gauß-Krümmung von f. In Koordinaten (wie oben) erhält man für die Gauß-Krümmung

$$K = \det(L) = \det(h_i^k) = \det\left(\frac{h_{ij}}{g_{kj}}\right) \overset{2\ \text{dim.}}{=} \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

Die Identität $\det(L) = \kappa_1\kappa_2$ ist durch die explizite Durchführung des oben genannten Extremwertproblems mit Nebenbedingung beweisbar.

Wenn die Gaußsche Krümmung einer Fläche verschwindet, kann man diese in eine Ebene abwickeln. Beispiele für abwickelbare Flächen sind Würfel, Kegel und das Oloid.

2.4 Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$

Wir machen nun eine Übertragung der vorigen Definitionen von 2-dimensionalen Flächen im $\mathbb{R}^3$ auf n-dimensionale Hyperflächen im umgebenden $\mathbb{R}^{n+1}$

Definition 2.11 (Hyperflächenstück, weitere Definitionen)**.** $U \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \subset U$ sei ein Parameter. $f : U \longleftrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ heißt reguläres Hyperflächenstück, wenn f eine Immersion ist. Es gilt also für einen Bildpunkt: $f(u) = (f_1(u), ..., f_{n+1}(u))$. Die Tangentialhyperebene ist das Bild der Abbildung $Df|_u$.
Die Gauß-Abbildung, Weingartenabbildung und die Fundamentalformen werden wie im $\mathbb{R}^3$ definiert. Die erste Fundamentalform ist dann z.B.: $(g_{ij})_{i,j=1,...,n} = \left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right\rangle\right)_{i,j}$

Definition 2.12 (Krümmungen der Hyperfläche)**.** Normalkrümmung: $II(X,X)$
Hauptkrümmungen $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n$: stationäre Werte von $II(X,X)$ mit Nebenbedingung $I(X,X) = 1$,bedeutet Eigenwerte von L
Gaußsche-Krümmung: $K = \det(L) = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot ... \cdot \kappa_n$

Im Wesentlichen gelten also die vorigen Definitionen auch auf beliebigen Hyperflächenstücken.

2.5 innere Geometrie von Flächen

Wir wollen nun geometrische Eigenschaften von Hyperflächen beschreiben, ohne einen umgebenden Raum zu benutzen.

Definition 2.13 (Richtungsableitung)**.** *Y sei ein differenzierbares Vektorfeld auf offener Menge des $\mathbb{R}^n$, und X sei fester Richtungsvektor in einem festen Punkt p dieser Menge, also $X \subset T_p\mathbb{R}^n$. Dann ist die Richtungsableitung von Y in Richtung X*

$$D_X Y\big|_p \equiv \left\langle DY\big|_p, X \right\rangle$$

Satz 2.14. *Für die Richtungsableitung gilt*

$$D_X Y\big|_p = \lim_{t\to} \frac{1}{t}\left(Y(p+tX) - Y(p)\right)$$

Wenn man eine beliebige differenzierbare Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ annimmt, mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$ gilt

$$D_X Y\big|_p = \lim_{t\to} \frac{1}{t}\left(Y(c(t)) - Y(c(0))\right)$$

Beweis. Mit Hilfe der Kettenregel berechnet man

$$\lim_{t\to} \frac{1}{t}\left(Y(c(t)) - Y(c(0))\right) = \left.\frac{dY}{dt}\right|_{t=0} = \left\langle DY\big|_{c(0)}, \left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=0} \right\rangle = \left\langle DY\big|_p, X \right\rangle = D_X Y\big|_p$$

□

Es gilt

$$D_{\frac{\partial f}{\partial u^i}} \frac{\partial f}{\partial u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$$

Satz 2.15 (Gauß'sche Ableitungsgleichung)**.** *Für eine Hyperfläche f mit Koordinaten x^i, zweiter Fundamentalform h_{ij} und Normalenvektoren ν gilt die Gaußsche Ableitungsgleichung:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma^l_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^l} + h_{ij}\nu$$

Beweis. Man spaltet $D_{\frac{\partial f}{\partial x^i}} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ in einen tangentialen Anteil und einen normalen Anteil auf. Dabei sind $t^l_{ij}, n_{ij} \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = t^l_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^l} + n_{ij}\nu$$

Man berechnet den Koeffizient n_{ij}:

$$h_{ij} \equiv \left\langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle = n_{ij}\nu\nu = n_{ij}$$

Mit Hilfe der Gleichung Gl.(10) berechnet man den Koeffizient t_{ij}^l:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial f}{\partial x^k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle &= \left\langle \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^l}, \frac{\partial x^l}{\partial f} \right\rangle \frac{\partial f}{\partial x^k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle \\ &= \left\langle \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^l}, \frac{\partial f}{\partial x^k} \right\rangle \frac{\partial x^l}{\partial f}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^l}, \frac{\partial f}{\partial x^k} \right\rangle \left\langle \frac{\partial x^l}{\partial f}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle \\ &= g_{lk}\Gamma_{ij}^l \equiv \Gamma_{kij} \end{aligned} \tag{37}$$

Außerdem gilt auch (da Normalenvektoren senkrecht auf Tangentialvektoren stehen):

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x^k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle = t_{ij}^l \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^l}, \frac{\partial f}{\partial x^k} \right\rangle = t_{ij}^l g_{lk} \tag{38}$$

Der Vergleich von Gl.(37) und Gl.(38) ergibt

$$\Gamma_{ij}^l = t_{ij}^l$$

□

Definition 2.16 (kovariante Ableitung als Fundamentalform-Abhängige Größe)**.** Y sei ein diffbares Vektorfeld längs eines Hyperflächenstücks f.
X sei ein fester Tangentialvektor an f im Punkt $p = f(u)$. Die kovariante Ableitung von Y in Richtung X ist definiert als:

$$\triangledown_X Y \equiv D_X Y - \langle D_X Y, \nu \rangle \nu$$

Wenn X nicht nur ein fester Tangentialvektor ist, sondern ein tangentiales Vektorfeld, dann ist $\triangledown_X Y$ auch ein tangentiales Vektorfeld. Es gilt

$$D_X Y = \triangledown_X Y + II(X,Y)\nu$$

Mit der Produktregel

$$0 = D_x \langle Y, \nu \rangle = \langle D_X Y, \nu \rangle + \langle Y, D_X \nu \rangle$$

gilt $\langle D_X Y, \nu \rangle = -\langle Y, D_X \nu \rangle$.
Für eine skalare Funktion gilt $D_X \varphi = \triangledown_X \varphi = X \cdot \varphi$. Für die kovariante Ableitung und die Richtungsableitung gilt die Produktregel, und sie sind beide linear und additiv. Außerdem gilt die Verträglichkeit mit dem Skalarprodukt:

$$\triangledown_X (Y_1, Y_2) = \langle \triangledown_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \triangledown_X Y_2 \rangle$$

Die Differentialgeometrie geht jetzt weiter, man findet verschiedene wichtige Sätze, wie z.B. dass die kovariante Ableitung nur von der ersten Fundamentalform abhängt, kann dann Christoffelsymbole definieren. Weiter geht es im Buch "Differentialgeometrie"von W. Kühnel mit Parallelverschiebung und Geodätischen. Dann gibt es noch

Satz 2.17 (Theorema Egregium, C.F.Gauss)**.** *Die Gaußsche Krümmung eines Flächenstücks im $\mathbb{R}^3$ ist eine Größe der inneren Geometrie, hängt also nur von der ersten Fundamentalform ab.*

Dann kann man u.a. den Krümmungstensor definieren:

$$R(X,Y)Z \equiv \triangledown_X \triangledown_Y Z - \triangledown_Y \triangledown_X Z - \triangledown_{D_X Y - D_Y X} Z$$

2.6 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Die im vorigen zusammengefasste Differentialgeometrie der (Hyper-)Flächen soll nun verallgemeinert werden. Wir haben Flächen durch eine Parametrisierung beschrieben, nun betrachten wir diese umgekehrt. Wir nehmen eine Fläche und suchen eine lokale Parametrisierung, also eine Abbildung der Fläche in einen n-dimensionalen eukidischen Raum. Das nennt man Karte. Eine Fläche im dreidimensionalen kann man also durch viele 2-dimensionale Karten abbilden. Die Definition einer Mannigfaltigkeit beruht im Wesentlichen auf der Möglichkeit, eine Punktmenge durch Karten sinnvoll darzustellen.

Definition 2.18 (abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeit)**.** Eine k-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit ist eine Menge M die aus Teilmengen $(M_i)_{i\in I}$ besteht, wovon jede als Karte darstellbar ist, so dass:

1. $M = \bigcup\limits_{i\in I} M_i$

2. Für jedes $i \in I$ gibt es eine injektive Abbildung $\varphi_i : M_i \longrightarrow \mathbb{R}^k$, wobei zusätzlich gefordert ist, dass $\varphi(M_i) \subset \mathbb{R}^k$ offen im $\mathbb{R}^k$ ist.

3. Wenn sich zwei Teilmengen teilweise überdecken, also $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ soll die Komposition
$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(M_i \cap M_j) \longrightarrow \varphi_j(M_i \cap M_j)$$
differenzierbar sein für beliebige i, j, und ausserdem soll $\varphi(M_i \cap M_j) \subset \mathbb{R}^k$ offen im $\mathbb{R}^k$ sein.

Die Menge $(M_i, \varphi_i)_{i\in I}$ heißt Atlas.
φ_i heißt Karte.
φ_i^{-1} heißt Parametrisierung.
$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(M_i \cap M_j) \longrightarrow \varphi_j(M_i \cap M_j)$ heißt Kartentransformation.

Dabei gilt: Jede k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist auch eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit. Man kann zahlreiche weitere Forderungen an Mannigfaltigkeiten stellen, und nennt sie dann jeweils anders. Hier soll jede Mannigfaltigkeit das Hausdorffsche Trennungsaxiom (zwei verschiedene Punkte haben auch disjunkte offene Umgebungen) erfüllen, und außerdem C^∞-differenzierbar sein.

Definition 2.19 (Riemannsche Metrik)**.** $p \in M$. Eine Riemannsche Metrik g auf M ist eine Zuordnung $p \longmapsto g_p \subset L^2(T_pM; \mathbb{R})$ mit

1. $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$ für alle X, Y

2. $g_p(X, X) > 0$ für alle $X \neq 0$

3. In jeder Karte sind die Koeffizienten g_{ij} differenzierbare Funktionen. Es gilt
$$g_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) \cdot dx^i\big|_p \otimes dx^j\big|_p$$

In lokalen Koordinaten ist die Metrik durch die Matrix (g_{ij}) der ersten Fundamentalform gegeben (die jetzt auf der Mannigfaltigkeit definiert sei).

Die erste Fundamentalform eines Hyperflächenstücks ist ein Beispiel einer Riemannschen Metrik.

Definition 2.20 (Riemannsche Mannigfaltigkeit)**.** Eine Mannigfaltigkeit, auf der eine Metrik existiert, heißt Riemannsche Mannigfaltigkeit.

2.7 Bezug zur Physik

Die Raumzeit wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie durch eine 4-dimensionale differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit definiert. Auf dieser Mannigfaltigkeit kann man eine oder mehrere Karten definieren, das sind die Koordinatensysteme. Die physikalischen Größen sind einerseits Skalare, also reelle Zahlen, die in jedem Koordinatensystem den gleichen Wert haben. Dann gibt es Tangentialvektoren an Punkte der Mannigfaltigkeit, die im Tangentialraum an einem Punkt liegen. Je nach Koordinatensystem haben diese andere Koeffizienten. Es gibt verschiedene Definitionen für Tangetialvektoren, hier ist nur eine:

Definition 2.21 (Tangentialvektor)**.** Ein Tangentialvektor in einem Punkt $p \in M$ mit einem Koordinatensystem $x^1, x^2, ..., x^n$ ist ein n-Tupel reeller Zahlen v^i $(i = 1, ...n)$, wobei in jedem anderen Koordinatensystem $\bar{x^1}, ..., \bar{x^n}$ der gleiche Vektor durch ein anderes Tupel $\bar{v}^i$dargesetllt wird, wobei

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j$$

Die Menge aller Tangentialvektoren an p spannen den Tangentialraum T_pM auf.

Man kann Tangentialvektoren auch als Ableitungsoperatoren skalarer Funktionen definieren $X : \{f : M \to \mathbb{R} | f \text{differenzierbar}\}$, wobei $\mathbb{R}$-Linearität und Produktregel gelten sollen. Dabei ist der Tangentialraum in p ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und wird in einem $x^1, ..., x^n$-Koordinatensystem aufgespannt von der Basis $(\frac{\partial}{\partial x^i})|_p$. Ein Tangentialvektor kann dann so geschrieben werden: $X = \sum X(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ Ein **Vektorfeld** ist analog definiert, nur dass dann der Vektor X eine Funktion von p ist: $X(p)$, und $X(x^i) \equiv \xi^i(p)$.
Die kovariante Ableitung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist eine Abbildung von zwei differenzierbaren **Vektorfeldern** wieder auf ein **Vektorfeld**. Diese Ableitung wird auch Riemannscher Zusammenhang genannt. Es gibt auf jeder Mannigfaltigkeit genau einen. In einem Koordinatensystem ist dieser gegeben durch:

$$\eta_{||i} = \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij} \eta^j$$

Desweiteren werden Tensoren betrachtet. Diese sind analog zu Vektoren, Abbildungen von

Elementen von Tangentialräumen. Dies sind also koordinatenunabhängige Größen.

Definition 2.22 (Tensor)**.** Ein s-fach kovarianter Tensor ist eine Abbildung

$$A_p : (T_pM) \times ... \times (T_pM) \to \mathbb{R}$$

[...]

3 Tensoren

Tensoren sind Größen, die ein bestimmtes Transformationsverhalten zwischen Koordinatensystemen aufweisen. Ist ein physikalisches Gesetz eine Tensorgleichung, so hat es in jedem Koordinatensystem dieselbe Form, das macht Tensoren so nützlich.

3.1 Kovariante und kontravariante Tensoren

Wir betrachten eine Koordinatentransformation von Koordinaten x^i zu neuen Koordinaten $\bar{x}^i$. Die einzelnen Komponenten werden dabei allgemein durch eine Funktion $f^i(x) = f^i(x^1, x^2, ..., x^n)$ vermittelt. Dies kann man so schreiben: $\bar{x} = \bar{x}(x)$. Die Rücktransformation ist $x = x(\bar{x})$. Das totale Differential der Transformationsfunktion lautet:

$$d\bar{x}^i = \frac{d\bar{x}^i}{dx^j} dx^j \tag{39}$$

Hierbei ist wieder über gleich vorkommende Indizes zu summieren. Das motiviert die Definiton des kontravarianten Vektors.

Definition 3.1. Ein kontravarianter Vektor (kontravarianter Tensor 1.Stufe) ist eine Größe, die sich wie folgt transformiert:

$$\bar{T}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} T^\nu \tag{40}$$

Nun betrachten wir ein skalares Feld in einem x-Koordinatensystem: $\Phi(x)$. Die Koordinaten x^i hängen dabei von den neuen Koordinaten $\bar{x}$ ab: $\Phi(x(\bar{x}))$. In einem Raumpunkt ändert sich der Wert des Skalarfeldes natürlich nicht, wenn sich das Koordinatensystem ändert. Wir untersuchen jetzt, wie sich die Ableitung des Skalarfeldes nach seinen Komponenten $\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$ ändert, wenn sich das Koordinatensystem ändert. Dazu betrachten wir diese Größe im neuen Koordiantensystem, und rechnen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \tag{41}$$

Größen, die sich so transformieren, bezeichnet man mit einem unteren Index $w_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$, und definiert sie folgendermaßen.

Definition 3.2. Ein kovarianter Vektor (kovarianter Tensor 1.Stufe) ist eine Größe, die sich wie folgt transformiert:

$$\bar{T}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} T_\nu \tag{42}$$

Definition 3.3. Ein Skalar ist eine Größe, die unter Koordinatentransformationen invariant bleibt.

Satz 3.4. *Es sei w_i ein kovarianter Tensor, und u^i ein kontravarianter Tensor 1.Stufe. Dann gilt:*

$$w_i u^i = P \tag{43}$$

wobei P ein Skalar ist.

Beweis.

$$\bar{P} = \bar{w}_i \bar{u}^i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} w_j u^k = \delta^j_k w_j u^i = w_j u^i = P \tag{44}$$

□

Es gibt Tensoren höherer Stufen, mit mehreren ko-und kontravarianten Indizes. Man sagt, ein Tensor hat die Stufe (a, b), wenn er a kontravariante und b kovariante Indizes besitzt.

Definition 3.5. P sei ein Skalar unter Koordinatentransformationen. $w^{(x)}$ sei ein kovarianter Vektor, mit den Komponenten $w^{(x)}_{i_1}$ bis $w^{(x)}_{i_a}$. Genauso sind $u_{(y)}$ kontravariante Vektoren (Die geklammerten Indizes sind eine Nummerierung der Vektoren, nicht der Komponenten). Es gelte

$$P = T^{i_1,i_2,\dots,i_a}_{j_1,j_2,\dots,j_b} u^{j_1}_{(1)} u^{j_2}_{(2)} \cdots u^{j_b}_{(b)}\, w^{(1)}_{i_1} w^{(2)}_{i_2} \cdots w^{(a)}_{i_a} \tag{45}$$

Dann nennt man $T^{i_1,i_2,\dots,i_a}_{j_1,j_2,\dots,j_b}$ einen Tensor der Stufe (a, b).

Satz 3.6 (Transformationsvorschrift für Tensoren)**.** *Jeder Index eines Tensors wird so transformiert wie der entsprechende Vektor. Genauer:*

$$\bar{T}^{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_a}_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_b} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_b}}{\partial \bar{x}^{\mu_b}} \frac{\partial \bar{x}^{\nu_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{\nu_a}}{\partial x^{i_a}} T^{i_1,i_2,\dots,i_a}_{j_1,j_2,\dots,j_b} \tag{46}$$

Beweis. Wir schreiben die transformierte Gl.(45) etwas um:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \bar{T}^{i_1,i_2,\dots,i_a}_{j_1,j_2,\dots,j_b} \bar{u}^{j_1}_{(1)} \bar{u}^{j_2}_{(2)} \cdots \bar{u}^{j_b}_{(b)}\, \bar{w}^{(1)}_{i_1} \bar{w}^{(2)}_{i_2} \cdots \bar{w}^{(a)}_{i_a} \\ &= \bar{T}^{i_1,i_2,\dots,i_a}_{j_1,j_2,\dots,j_b} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_b}}{\partial \bar{x}^{\mu_b}} \frac{\partial \bar{x}^{\nu_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{\nu_a}}{\partial x^{i_a}} u^{j_1}_{(1)} u^{j_2}_{(2)} \cdots u^{j_b}_{(b)}\, w^{(1)}_{i_1} w^{(2)}_{i_2} \cdots w^{(a)}_{i_a}\end{aligned}$$

Da P ein Skalar ist, gilt $P = \bar{P}$. Also folgt mit dem letzten Term

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \bar{T}^{i_1,i_2,\dots,i_a}_{j_1,j_2,\dots,j_b} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_b}}{\partial \bar{x}^{\mu_b}} \frac{\partial \bar{x}^{\nu_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{\nu_a}}{\partial x^{i_a}} u^{j_1}_{(1)} u^{j_2}_{(2)} \cdots u^{j_b}_{(b)}\, w^{(1)}_{i_1} w^{(2)}_{i_2} \cdots w^{(a)}_{i_a} \\ &= T^{i_1,i_2,\dots,i_a}_{j_1,j_2,\dots,j_b} u^{j_1}_{(1)} u^{j_2}_{(2)} \cdots u^{j_b}_{(b)}\, w^{(1)}_{i_1} w^{(2)}_{i_2} \cdots w^{(a)}_{i_a} \qquad = P\end{aligned}$$

Durch vergleichen findet man die behauptete Transformationsformel. □

3.2 Rechenregeln für Tensoren

1. Zwei Tensoren sind **gleich**, wenn alle ihre Komponenten gleich sind. Dies ist dann in jedem Koordinatensystem erfüllt.

2. Die **Summe** von zwei Tensoren $T_{(1)} + T_{(2)}$ vom Rang (a, b) ist wieder ein Tensor vom Rang (a,b) $T_{(3)}$. Die Komponenten von $T_{(3)}$ sind dabei einfach die Summe der Komponenten von $T_{(1)} + T_{(2)}$, mit jeweils gleichen Indizes.

3. **Skalare Multiplikation** erhält den Tensorcharakter.

4. **Direktes Produkt** (äußeres Produkt): Multipliziert man alle Komponenten des eines Tensors $T_{(1)}$ vom Rang (a,b) mit allen eines anderen $T_{(2)}$ vom Rang (c,d), erhält man wieder einen Tensor, dieser ist vom Rang (a+c,b+d). Bsp:

$$A^{\alpha\beta}_{\gamma} B^{\mu}_{\nu} = C^{\alpha\beta\mu}_{\gamma\nu}$$

Beweis.

$$\bar{C}^{\alpha\beta\mu}_{\gamma\nu} = \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}} A^{\rho\sigma}_{\delta} \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial \bar{x}^{\nu}} B^{\tau}_{\epsilon} = \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}} C^{\rho\sigma\tau}_{\delta\epsilon}$$

□

5. In einem n-dimensionalen Raum kann jeder Tensor vom Rang $a > 0$ geschrieben werden als eine **Summe von Tensorprodukten** mit Vektoren (Tensoren 1.Stufe), mit jeweils a Faktoren. Dabei ist die minimale Anzahl von Vektorprodukten n^{a-1}. Beweis siehe Adler/Bazin/Schiffer.

6. **Verjüngung:** Über gleiche ko-und kontravariante Indizes desselben Tensors kann summiert werden, das Ergebnis ist wieder ein Tensor, dessen ko- und kontravariante Stufe sich um 1 erniedrigt hat: $T^{i_1,i_2,\ldots,i_a,\mu}_{j_1,j_2,\ldots,j_b,\mu}$ ist ein Tensor vom Rang (a,b). Beweis durch Ausschreiben der Transformation, unter Benutzung von $\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta}$. Beispiel: $w_i u^i$ ist nichts anderes als ein Tensorprodukt vom Rang $(1-1, 1-1) = (0,0)$, also ein Skalar.

7. **Quotiententheorem**: Mit dem Quotiententheorem kann man herausfinden, ob eine Größe ein Tensor ist oder nicht. $A^{j_l,\ldots,j_b}_{i_k\ldots,i_a}$ sei ein willkürlicher Tensor, $T^{i_1,i_2,\ldots,i_a}_{j_1,j_2,\ldots,j_b}$ sei eine Größe, von der bekannt ist, dass

$$S^{i_1,\ldots,i_{k-1}}_{j_1,\ldots,j_{l-1}} = T^{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_a}_{j_1,\ldots,j_l,\ldots,j_b} A^{j_l,\ldots,j_b}_{i_k,\ldots,i_a} \tag{47}$$

ein Tensor ist. Dann ist auch T ein Tensor, vom Rang (a,b). Beweis siehe Adler/Bazin/Schiffer.

3.3 Metrik

Wir bezeichnen hier $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ als einen **symmetrischen** kovarianten Tensor 2.Stufe.

Definition 3.7. Führt man ein Tensorprodukt mit einem $g_{\alpha\beta}$ aus, bei dem gleichzeitg kontrahiert wird, definiert man den Produktvektor so:

$$T^{\sigma}{}_{\alpha} = g_{\alpha\beta}T^{\sigma\beta} = g_{\beta\alpha}T^{\sigma\beta}$$

Man nennt $T^{\sigma}{}_{\alpha}$ den assozierten Tensor zu $T^{\sigma\beta}$. Wichtig ist, dass die Indizes ihre richtige Position behalten. Hier ist σ der erste Index, und er bleibt auch beim assozierten Index der erste Index. Der Tensor g zieht den zweiten Index β herunter (und nennt ihn um zu α), doch α bleibt auch hier an zweiter Stelle. Dies ist auch klar, da g ja per Definition symmetrisch ist.

Beispielsweise gilt (solange T nicht symmetrisch ist) $T^{i}{}_{j} = g_{j\sigma}T^{i\sigma} \neq g_{j\sigma}T^{\sigma i} = T_{j}{}^{i}$ nach obiger Definition. Auf diese Weise kann man jeden kontravarianten Index eines beliebig hohen Tensors herunterziehen um einen assozierten Tensor zu kreieren. Wir betrachten nun eine **symmetrische** Größe g^{ik}, die wir so definieren:

$$g^{ik}g_{jk} = \delta^{i}_{j}$$

Es ergibt sich daraus sofort: $g^{i}_{j} = \delta^{i}_{j}$. Hier muss die Stellung der Indizes nicht beachtet werden, da es sich um symmetrische Größen handelt.

Satz 3.8. *g^{ik} ist ein Tensor.*

Beweis. Wenn man zeigt, dass δ^{i}_{j} ein Tensor ist, so ist auch g^{ik} ein Tensor, da das Tensorprodukt wieder einen Tensor ergibt: $g^{ik}g_{jk} = a^{ik}_{jk}$, und die Verjüngung den Tensorcharakter erhält, nur die Stufe ändert: $a^{ik}_{jk} \equiv \delta^{i}_{j}$. Mit einem Skalar P und einem Tensor T^{i}_{j} erhält man:

$$P = \delta^{j}_{i}\,T^{i}_{j}$$

Das Quotiententheorem besagt nun, dass δ^{i}_{j} ein Tensor sein muss. □

Jetzt ist klar, dass man mit g^{ik} Indizes heben kann.

Definition 3.9. Führt man ein Tensorprodukt mit einem $g^{\alpha\beta}$ aus, bei dem gleichzeitg kontrahiert wird, definiert man den Produktvektor so:

$$T_{\sigma}{}^{\alpha} = g^{\alpha\beta}T_{\sigma\beta} = g^{\beta\alpha}T_{\sigma\beta}$$

3.4 Anwendung: Transformation des Christoffel-Symbols

Wir rechnen aus, wie sich $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ transformiert. Man wird merken, dass es sich gerade nicht wie ein Tensor transformiert. Wir nehmen die erste Darstellung aus Gl.(10), und betrachten gestrichene Komponenten:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} \equiv & \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\underbrace{\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \bar{x}^\nu}\right)}_{\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\nu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau}} \\
= & \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu}\left(\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\nu}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau}\frac{\partial^2 \xi^\tau}{\partial x^\sigma \partial \bar{x}^\nu}\right) \\
= & \underbrace{\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\tau}}_{\Gamma^\rho_{\sigma\tau}}\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau}\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x^\sigma \partial \bar{x}^\nu} \\
= & \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\tau} + \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\tau}\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\nu}
\end{aligned}$$

Hier sieht man, dass der erste Term das normale Tensorverhalten hat, der zusätzliche zweite Term ist verantwortlich dafür, dass $\Gamma^\rho_{\sigma\tau}$ kein Tensor ist. Man kann den letzten Term noch umformen. Betrachte dazu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu}(\delta^\tau_\sigma) = 0 \quad = & \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu}\left(\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\sigma}\right) = \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu \partial x^\sigma} \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\sigma} \quad = & \quad -\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\sigma}\right) \qquad \Big| \cdot \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu}\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\tau} \\
\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu}\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\tau} \quad = & \quad -\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\sigma}\right)\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu}\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\tau} \\
\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\nu}\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\tau} \quad = & \quad -\frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu}
\end{aligned} \tag{48}$$

Man sieht, dass die letzten Terme gleich sind, dadurch können wir die Transformation folgendermaßen schreiben:

Wichtige Gleichung 3.10. *Transformation des Christoffelsymbols*

$$\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\tau} - \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu} \tag{49}$$

3.5 Die kovariante Ableitung

Betrachtet man eine gewöhnliche partielle Ableitung eines Tensors, so findet man, dass sich diese nicht wie ein Tensor transformiert. Als Beispiel dazu betrachten wir die Rechnung mit einem kontravarianten Vektor T^β:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{T}^\alpha}{\partial \bar{x}^\gamma} = \bar{T}^\alpha_{|\bar{\gamma}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\gamma}\left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}T^\beta\right) = \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\delta}\left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}T^\beta\right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\gamma}}_{\substack{\text{übliches}\\ \text{Tensorverhalten}}}\frac{\partial}{\partial x^\delta}T^\beta + \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\delta}\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\gamma}T^\beta \end{aligned} \tag{50}$$

Man sieht den Zusatzterm, der verhindert, dass sich eine partielle Ableitung wie ein Tensor transformiert.

3.5.1 Erste Definition der kovarianten Ableitung

Um eine Ableitung zu erhalten, die ein Tensor ist, betrachten wir einen Vektorfeld v^ν dass zwei Punkte A und B besitzt, die nahe beieinander liegen. A habe die Koordinaten x^a und B die Koordinaten x^b. Der Vektor bei A ist $v^\nu(x)$. Der Vektor bei B ist $v^\nu(x+dx)$. Dies kann man in erster Ordnung nach Taylor entwickeln. Allgemein für eine Funktion $f(\vec{x})$ um den Entwicklungspunkt $\vec{a}$ sieht das so aus:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i}|_{\vec{a}}(x^i - a^i)$$

Möchte man den Bereich um $\vec{a} + d\vec{a}$ darstellen, setzt man dies ein:

$$f(\vec{x}+d\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x^i}(a^i + da^i - a^i) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x^i}(da^i)$$

Dies kann man nun analog mit den Tensoren durchführen (Entwicklungspunkt x, eingesetzter Punkt $x + dx$): und erhält:

$$v^\nu(x+dx) = v^\nu(x) + \frac{\partial v^\nu(x)}{\partial x^\beta}(dx^\beta) \tag{51}$$

Wir verwenden nun einen Vektor am Punkt B, der in gewissem Sinne parallel zu dem Vektor an A sein soll. Diesen nennen wir p^ν. Dieser Vektor hat nur ein wenig andere Komponenten als $v^\nu(x)$ bei A:

$$p^\nu(x+dx) \equiv v^\nu(x) + ds^\alpha$$

Diese beide Vektoren an B sehen ähnlich aus. Sie haben gemeinsam, dass der zweite Term nicht tensoriell ist (da er sich jeweils als Differenz von Tensoren an verschiedenen Raumpunkten ergibt). Die sogenannte kovariante Ableitung (des Vektorfeldes) ist nun der Vergleich der beiden Vektoren an B geteilt durch die Differenz der Koordinaten von A und B, und das im Limes:

Definition 3.11 (Kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektorfeldes)**.**

$$v^\nu_{||\gamma} = \lim_{dx^\gamma \to 0}\frac{v^\nu(x+dx) - p^\nu(x+dx)}{dx^\gamma} \tag{52}$$

Wenn $dx^\mu = 0$ ist, ist natürlich $p^\nu = v^\nu(x)$, also $ds^\alpha = 0$. Wenn das Vektorfeld ganz verschwindet, ist auch $ds^\alpha = 0$. Jetzt kann man annehmen, dass ds^α eine Funktion von dx^μ und $v^\nu(x)$ ist. Folgende Gleichung erfüllt diese beiden Bedingungen auf einfache Weise:

$$ds^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\nu\mu}\, v^\nu(x)\, dx^\mu \tag{53}$$

wobei die Γ's nur erstmal irgendwelche multiplikativen Faktoren sind. Dies kann man nun in Gl.(52) einsetzen, und erhält einen anderen Ausdruck für die kovariante Ableitung:

$$v^\alpha_{||\gamma} = \lim_{dx^\gamma \to 0} \frac{v^\alpha(x) + \frac{\partial v^\alpha(x)}{\partial x^\gamma}(dx^\gamma) - v^\alpha(x) + \Gamma^\alpha_{\rho\gamma}\, v^\rho(x)\, dx^\gamma}{dx^\gamma} = \frac{\partial v^\alpha(x)}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\alpha_{\rho\gamma}\, v^\rho(x)$$

Die Forderung ist nun, dass sich $v^\alpha_{||\gamma}$ wie ein Tensor vom Typ (1,1) transformiert.

Satz 3.12. *Die kovariante Ableitung $v^\alpha_{||\gamma}$ transformiert sich wie ein Tensor, wenn $\Gamma^\alpha_{\rho\gamma}$ das Christoffel-Symbol 2.Art ist.*

Beweis. In Gl.(49) wurde gezeigt, dass

$$\bar\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\beta}\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\gamma}\Gamma^\rho_{\sigma\tau} - \frac{\partial^2 \bar x^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar x^\beta}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\gamma}$$

Weiterhin wurde in Gl.(50) gezeigt, dass

$$\frac{\partial \bar v^\alpha}{\partial \bar x^\gamma} = \frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar x^\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\delta}v^\beta + \frac{\partial^2 \bar x^\alpha}{\partial x^\beta\, \partial x^\delta}\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar x^\gamma}v^\beta$$

Mit $\frac{\partial \bar v^\alpha}{\partial \bar x^\gamma} \equiv \bar v^\alpha_{|\bar\gamma}$ kann man berechnen:

$$\begin{aligned}
\bar v^\alpha_{|\bar\gamma} + \bar\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, \bar v^\beta &= \frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar x^\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\delta}v^\beta + \frac{\partial^2 \bar x^\alpha}{\partial x^\beta\, \partial x^\delta}\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar x^\gamma}\delta^\beta_\eta v^\eta \\
&\quad + \frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\beta}\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\gamma}\Gamma^\rho_{\sigma\tau}\frac{\partial \bar x^\beta}{\partial x^\eta}v^\eta - \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar x^\beta}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\gamma}\frac{\partial \bar x^\beta}{\partial x^\eta}v^\eta \\
&= \frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar x^\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\delta}v^\beta + \frac{\partial^2 \bar x^\alpha}{\partial x^\eta\, \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\gamma}v^\eta + \frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\gamma}\Gamma^\rho_{\sigma\tau}\, v^\sigma - \frac{\partial^2 \bar x^\alpha}{\partial x^\eta\, \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar x^\gamma}v^\eta \\
&= \frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar x^\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\delta}v^\beta + \frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\gamma}\Gamma^\rho_{\sigma\tau}\, v^\sigma \\
&= \frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar x^\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x^\delta}v^\beta + \Gamma^\beta_{\sigma\delta}\, v^\sigma\right) = \frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar x^\gamma}\, v^\beta_{||\delta}
\end{aligned}$$

Die kovariante Ableitung transformiert sich also wie ein Tensor. Im folgenden sind die auftretenden Faktoren $\Gamma^\beta_{\sigma\delta}$ als die vorher abgeleiteten Christoffel-Symbole zu verstehen. □

3.5.2 Zweite Definition der kovarianten Ableitung

Man kann sich überlegen, wie man eine parallele Verschiebung von Vektoren im Raum beschreiben kann. Im bekannten Euklidischen Raum hat ein parallel verschobener Vektor die gleiche Länge und Richtung und die gleichen Komponenten wie der Ursprungsvektor. Im

Riemannschen Raum ist dies nicht mehr so einfach. Wir versetzen uns nun in ein lokales, mitbewegtes Koordinatensystem (geodätisches Bezugssystem) mit Koordinaten ξ^α. Die Ableitung nach diesen lokalen Koordinaten (Index I: Inertialsystem) bezeichnen wir als ${T_I}^\beta{}_\alpha$:

$$ {T_I}^\beta{}_\alpha = \frac{\partial v_I^\beta}{\partial \xi^\alpha} $$

Benutzt man Gl.(50), um ${T_I}^\beta{}_\alpha$ als Funktion von dem Vektor v_I in einem allgemeinen Koordinatensystem auszudrücken, erhält man folgenden Ausdruck. (Wir benennen den Vektor dann ohne Index: v. Also: v_I mit Koordinaten ξ^α, v mit Koordinaten x^μ)

$$ {T_I}^\beta{}_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + \underbrace{\frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\mu \, \partial x^\lambda}\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}}_{\substack{\text{wird weiter}\\ \text{umgeformt}}} \quad v^\lambda $$

$$ \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\delta^\beta_\rho \frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\mu \, \partial x^\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\rho}\frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\mu \, \partial x^\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\mu\lambda} $$

Damit schreibt sich

$$ {T_I}^\beta{}_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\, v^\lambda\right) $$

Die Klammer transformiert sich dabei wie ein Tensor! Da im Inertialsystem der Zusammenhang verschwindet ${\Gamma_I}^\beta{}_{\alpha\gamma} = 0$ kann man schreiben:

$$ \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\left(\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\, v^\nu\right) = \frac{\partial v_I^\beta}{\partial \xi^\alpha} + {\Gamma_I}^\beta{}_{\alpha\gamma}\, v_I^\gamma $$

Damit haben wir nun einen Term gefunden, der eine partiell Ableitung und den Zusammenhang enthält, und sich wie ein Tensor transformiert.

Definition 3.13 (kovariante Ableitung)**.** Die kovariante Ableitung für ein kontravariantes Vektorfeld v^ν ist definiert als

$$ v^\nu_{||\mu} = v^\nu_{|\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} v^\lambda \tag{54} $$

3.5.3 Kovariante Ableitung für kovariantes Vektorfeld

Wir überlegen nun, wie man für ein kovariantes Vektorfeld die kovariante Ableitung definiert. Dazu nehmen wir einen Skalar $S = v^\nu w_\nu$ und berechnen:

$$ \frac{\partial}{\partial x^\mu} S = S_{|\mu} = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} w_\nu + v^\nu \frac{\partial w_\nu}{\partial x^\mu} $$

Den ersten Term kann man mithilfe von Gl.(54) schreiben als (mit Umbenennung eines stummen Indizes $\nu \leftrightarrow \lambda$)

$$ v^\nu_{||\mu}\, w_\nu - \left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} v^\nu\right) w_\lambda + v^\nu \frac{\partial w_\nu}{\partial x^\mu} = v^\nu_{||\mu}\, w_\nu + v^\nu \left(\frac{\partial w_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} w_\lambda\right) $$

Nach dem Quotiententheorem ist der Term in Klammern ein Tensor vom Typ (0,2) und damit definiert man

Definition 3.14 (kovariante Ableitung eines kovarianten Vektorfeldes)**.**

$$w_{\nu||\mu} = w_{\nu|\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} w_{\lambda} \tag{55}$$

Der Unterschied ist also nur das Vorzeichen, abgesehen von den Indizes.

3.5.4 Kovariante Ableitung für höhere Tensoren

Wir berechnen die kovariante Ableitung eines Tensors vom Typ(1,1) $T^{\nu}{}_{\lambda} = v^{\nu} w_{\lambda}$:

$$\begin{aligned} T^{\nu}{}_{\lambda||\mu} &= v^{\nu}_{||\mu} w_{\lambda} + v^{\nu} w_{\lambda||\mu} \\ &= v^{\nu}_{|\mu} w_{\lambda} + \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} v^{\alpha} w_{\lambda} + v^{\nu} w_{\lambda|\mu} - v^{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} w_{\alpha} \\ &= T^{\nu}{}_{\lambda|\mu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} T^{\alpha}{}_{\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} T^{\nu}{}_{\alpha} \end{aligned}$$

Analog ist die kovariante Ableitungen für Tensoren höherer Stufen definiert. Man hängt einfach für jeden Index ein passendes Γ mit dem richtigen Vorzeichen und richtigen Indizes an.

3.5.5 Eigenschaften der kovarianten Ableitung

1. Linearität: $(\alpha A^{\nu}{}_{\lambda} + \beta B^{\nu}_{\lambda})_{||\mu} = \alpha (A^{\nu}{}_{\lambda})_{||\mu} + \beta (B^{\nu}_{\lambda})_{||\mu}$
2. Produktregel: $(A^{\nu}{}_{\lambda} B^{\sigma})_{||\mu} = (A^{\nu}{}_{\lambda})_{||\mu} \cdot B^{\sigma} + (A^{\nu}{}_{\lambda}) \cdot (B^{\sigma})_{||\mu}$
3. $(T^{\nu\lambda}_{\lambda})_{||\mu} = (T^{\nu\lambda}_{\lambda})_{|\mu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} T^{\alpha\lambda}_{\lambda}$
4. im Allgemeinen: $V^{\alpha}_{||\mu||\nu} \neq V^{\alpha}_{||\nu||\mu}$

3.5.6 Das Ricci-Theorem

Es gilt

$$g^{\mu\nu}{}_{||\kappa} = 0$$
$$\delta^{\nu}{}_{\mu||\kappa} = 0$$

Damit

$$g_{\mu\nu||\kappa} = g_{\mu\nu|\kappa} - g_{\lambda\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu} \tag{56}$$

und vor allem

$$v^{\mu}_{||\lambda} = (g^{\mu\nu} v_{\nu})_{||\lambda} = g^{\mu\nu} v_{||\lambda}$$

3.5.7 Divergenz

Die allgemein kovariante Verallgemeinerung der Divergenz ($\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$) ist eine kovariante Ableitung, mit Kontraktion:

$$v^\mu_{||\mu} = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} v^\nu$$

Multipliziert man Gl.(56) mit $g^{\lambda\mu}$

$$g_{\mu\lambda||\nu} \cdot g^{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda|\nu} \cdot g^{\lambda\mu} - g_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \cdot g^{\lambda\mu} - g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \cdot g^{\lambda\mu}$$

und nutzt man $g_{\lambda\mu||\gamma} = 0$, so findet man

$$0 = g_{\mu\lambda|\nu} \cdot g^{\lambda\mu} - 2\Gamma^\mu_{\mu\nu}$$

und damit

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\lambda|\nu} \cdot g^{\lambda\mu} \tag{57}$$

Man rechnet nun mit der Determinanten von $g_{\alpha\beta}$ weiter $g = det(g_{\alpha\beta}) = \sum_\lambda g_{\mu\lambda}\triangle^{\mu\lambda}$, schreibt damit

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\lambda}} = \triangle^{\mu\lambda}$$

, somit

$$g^{\mu\lambda} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\lambda}}$$

Das kann man nun in Gl.(57) einsetzen, und erhält nach einfachen Umformungen

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\ln|g| = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\ln\sqrt{|g|} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^\nu}$$

Damit ist die Divergenz nun

Wichtige Gleichung 3.15 (kovariante Divergenz)**.**

$$v^\mu_{||\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{|g|}v^\mu\right) \tag{58}$$

3.6 Verschiebung von Vektoren

Im gewöhnlichen Euklidischen Raum und rechtwinkligen Koordinatensystem sind zwei Vektoren, die die gleichen Komponenten haben, aber an zwei verschiedenen Punkten sitzen, parallel und gleich lang. Man kann den einen Vektor einfach durch Verschieben in den anderen überführen. Ein konstantes Vektorfeld bedeutet einfach, jedem Punkt im Raum wird ein Vektor zugeordnet, der immer die gleichen Komponenten hat. Im Riemannschen Raum wird dies jedoch schwieriger, da sich bei konstanten Koeffizienten die Länge der

Vektoren an verschiedenen Raumpunkten ändert. Nehme man zum Beispiel die Schwarzschildmetrik $g_{\mu\nu} = diag(e^{\nu(r)}, -e^{\lambda(r)}, -r^2, -r^2 \sin^2 \Theta)$ mit Koordinaten ct, r, Θ, ϕ. Ein Vektor $a = (0, 0, 3, 0)$ beim Punkt $P = (0, 1, 1, 1)$ hat die Länge

$$l = g_{33}(P)(3^2) = -9$$

Beim Punkt $Q = (0, 2, 1, 1)$ ist die Länge aber $l = g_{33}(Q)(3^2) = -4 \cdot 9 = -36 \neq -9$. Nur wenn alle Einträge der Metrik konstant sind, und man ein rechtwinkliges Koordinatensystem benutzt, kann man ein konstantes Vektorfeld durch ein Vektorfeld mit konstanten Komponenten ausdrücken. Diesen Raum nennt man dann pseudo-Euklidisch.

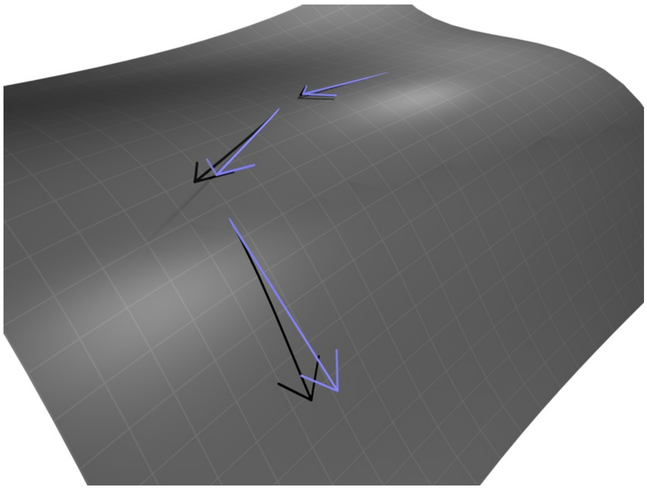

Abbildung 1: Verschiebung eines Vektors auf einer Mannigfaltigkeit

3.6.1 Allgemeine Verschiebung von Vektoren

Wir schauen nun, wie stark sich die Komponenten eines Vektorfeldes in einem Koordinatensystem eigentlich ändern. Dazu setzen wir in einem Koordinatensystem x^i ein Vektorfeld mit konstanten Koeffizienten v^i. In einem willkürlichen, anderen Koordinatensystem $\bar{x}^i$ ist dieses Vektorfeld:

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} v^k$$

Jetzt betrachten wir die Änderung der Komponenten $\bar{v}^i$ (entlang einer Kurve) nach einem Parameter p:

$$\frac{d\bar{v}^i}{dp} = \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial p} v^k = \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^l} \frac{dx^l}{dp} v^k$$

Hier wurde $\frac{\partial}{\partial p} v^k = 0$ benutzt, da dieses Vektorfeld ja konstante Komponenten hat. Jetzt kann man natürlich die Abhängigkeit nach den alten, konstanten Komponenten umwandeln in eine Abhängigkeit des Ausdrucks nur von den neuen Komponenten $\bar{v}^i$. Das geht mit normalen Tensoroperationen:

$$\frac{d\bar{v}^i}{dp} = \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial p} v^k = \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^l} \frac{dx^l}{d\bar{x}^m} \frac{d\bar{x}^m}{dp} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \bar{v}^j \tag{59}$$

Unter Zuhilfenahme von Gl.(48) kann man hier ein Christoffelsymbol einbauen. Dazu benennen wir die Indizes in Gl.(48) etwas um:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^j} = -\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\tau}$$

Das ist ja nach der Definition in Gl.(8)

$$-\bar{\Gamma}^i_{mj} = -\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\tau} = \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^j}$$

Da hier die rechte Seite in Gl.(59) vorkommt, kann man einsetzen:

$$\frac{d\bar{v}^i}{dp} = -\bar{\Gamma}^i_{mj} \frac{d\bar{x}^m}{dp} \bar{v}^j$$

In differentieller Form betrachtet:

$$d\bar{v}^i = -\bar{\Gamma}^i_{mj} d\bar{x}^m \bar{v}^j$$

Dies kann man mit Gl.(53) vergleichen, und erkennt die Konsistenz! Bequemer kann man diese Gleichung so schreiben:

$$dv^i = -\Gamma^i_{mj} dx^m v^j \tag{60}$$

Diese Gleichung beschreibt ein allgemeines Verschiebungsgesetz für Vektoren. Der Vektor v^i bei x wird verschoben zum Punkt $x + dx$ und hat dort die Komponenten $v^i + dv^i$. Dabei gelten zwei Forderungen:

1. Gl.(60) soll in jedem Koordinatensystem gelten, also auch z.B. $\bar{v}^i + d\bar{v}^i = \bar{v}^i - \bar{\Gamma}^i_{mj} d\bar{x}^m \bar{v}^j$
2. $v^i(x + dx) = v^i + dv^i$ soll ein Vektor sein.

Satz 3.16. *v^i sei ein Vektor bei x. Der mit dem Verschiebungsgesetz Gl.(60) nach $x + dx$ verschobene Vektor $v^i(x+dx) = v^i+dv^i$ ist wieder ein Vektor, wenn Γ^i_{mj} das Christoffelsymbol 2.Art ist.*

Beweis. Wir betrachten den zu $x + dx$ verschobenen Vektor $v^i + dv^i = v^i - \Gamma^i_{mj}\, dx^m\, v^j$.

$$\bar{v}^j - \bar{\Gamma}^j_{ms} d\bar{x}^m \bar{v}^s = (v^i - \Gamma^i_{ml} dx^m v^l) \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \right) |_{x+dx}$$

Man kann die Transformationsmatrix in 1.Ordnung entwickeln nach Gl.(51), und einsetzen:

$$\bar{v}^j - \bar{\Gamma}^j_{ms} d\bar{x}^m \bar{v}^s = \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \right) |_x v^i + \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^m \partial x^l} dx^m v^l - \Gamma^i_{ml} dx^m v^l \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \right) |_x - \Gamma^i_{ml} dx^m v^l \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^p \partial x^l} dx^p$$

Den letzten Term vernachlässigen wir wegen einem quadratisch auftretenden Differentials, und schreiben einfach um:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^j_{ms} d\bar{x}^m \bar{v}^s &= \left(\Gamma^i_{rl} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^r \partial x^l} \right) dx^r v^l \\ &= \left(\Gamma^i_{rl} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^r \partial x^l} \right) \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} d\bar{x}^m \bar{v}^s \\ &= \left(\Gamma^i_{rl} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} - \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^r \partial x^l} \right) d\bar{x}^m \bar{v}^s \end{aligned}$$

Dies ist genau das in Gl.(49) gefundene Transformationsverhalten. □

3.6.2 Parallele Verschiebung von Vektoren: Länge bleibt erhalten

Bis jetzt haben wir nur allgemein die Verschiebung von Vektoren betrachtet, mit oben genannten Bedingungen. Jetzt suchen wir zusätzliche Bedingungen, so dass der verschobene Vektor auch noch die gleiche Länge wie der ursprüngliche Vektor hat. Das bedeutet, das Skalarprodukt von zwei Vektoren a^i und b^k soll invariant bleiben, wenn man es entlang einer Kurve verschiebt

$$\frac{d}{ds}(g_{ik}a^i b^k) = 0$$

Das kann man mit der Kettenregel ableiten:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\frac{dx^l}{ds}a^i b^k + b^k g_{ik}\frac{da^i}{ds} + a^i g_{ik}\frac{db^k}{ds} = 0$$

Setzt man nun das Verschiebungsgesetz Gl.(60) (geteilt durch ds)ein, erhält man (nach Umbenennung der Indizes)

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^r_{li}\, g_{rk} - \Gamma^r_{lk}\, g_{ir} = 0$$

Hier wurde noch durch $\frac{dx^l}{ds}a^i b^k$ geteilt. Nennt man nun die Indizes etwas um, haben wir ganz genau die Gl.(14), und dieselben Überlegungen führen auf Gl.(17) als Bedingung für eine Verschiebung, bei der die Länge eines Vektors konstant gehalten wird. Dies nennt man **Parallelverschiebung**. Wenn also Γ das Christoffelsymbol nach Gl.(14) ist, beschreibt Gl.(60) sogar eine Parallelverschiebung.

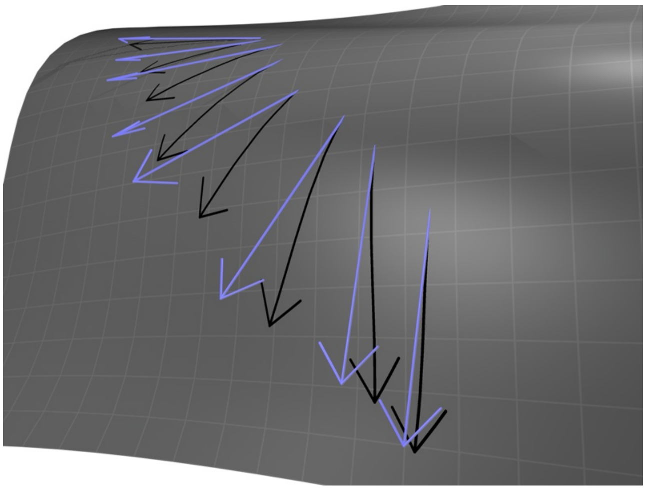

Abbildung 2: Parallelverschiebung auf einer Mannigfaltigkeit

Man kann die im Vorigen abgeleitete Geodätenbewegung auch als Parallelverschiebung des Geschwindigkeitsvektors deuten. Dazu nehmen wir die Formel für die geodätische Bewegung

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$

und ersetzen $\dot{x}^\nu \equiv u^\nu$, weiterhin multiplizieren wir mit $d\tau$:

$$du^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(u^\mu d\tau)u^\nu = 0$$

Jetzt ist aber $u^\mu d\tau = \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau = dx^\mu$, somit erhält man eine analoge Gleichung zu der Parallelverschiebung Gl.(60), hier also die parallele Verschiebung des Geschwindigkeitsvektors:

$$du^\lambda = -\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(dx^\mu)u^\nu = 0$$

3.7 Der Riemannsche Krümmungstensor

Findet man ein ausgezeichnetes Koordinatensystem, wo die Metrik konstant ist, wird der metrische Zusammenhang $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ verschwinden. In diesem Fallist die kovariante Ableitung gleich der gewöhnlichen partiellen Ableitung, und es gilt insbesondere $v^\alpha_{||\beta||\gamma} = \frac{\partial}{\partial\xi^\beta}\frac{\partial v^\alpha}{\partial\xi^\gamma} = v^\alpha_{||\gamma||\beta}$ Dies motiviert die Suche nach einer Größe, die angibt, inwieweit das Kommutieren der Ableitungen nicht funktioniert, anschaulich erhält man daraus eine Größe, die die Krümmung spezifiziert, der Riemannsche Krümmungstensor.

$$\begin{aligned}
v^\alpha_{||\beta||\gamma} &= \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}v^\mu\right)_{||\gamma} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}v^\mu\right) + \Gamma^\alpha_{\gamma\nu}\left(\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\beta} + \Gamma^\nu_{\beta\mu}v^\mu\right) + \Gamma^\nu_{\beta\gamma}\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu}v^\mu\right) \\
&= \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x^\beta x^\gamma} + \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma}v^\mu + \Gamma^\alpha_{\gamma\nu}\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\beta} - \Gamma^\nu_{\beta\gamma}\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\gamma} + (\Gamma^\alpha_{\gamma\nu}\Gamma^\nu_{\beta\mu} - \Gamma^\nu_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\nu\mu})v^\mu
\end{aligned}$$

Jetzt wird die Reihenfolge der Ableitungen vertauscht:

$$\begin{aligned}
v^\alpha_{||\gamma||\beta} &= \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}v^\mu\right)_{||\beta} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}v^\mu\right) + \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\left(\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\nu_{\gamma\mu}v^\mu\right) + \Gamma^\nu_{\gamma\beta}\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu}v^\mu\right) \\
&= \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x^\gamma x^\beta} + \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta}v^\mu + \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\gamma} - \Gamma^\nu_{\gamma\beta}\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\beta} + (\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\gamma\mu} - \Gamma^\nu_{\gamma\beta}\Gamma^\alpha_{\nu\mu})v^\mu
\end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen voneinander abgezogen ergibt

$$v^\alpha_{||\beta||\gamma} - v^\alpha_{||\gamma||\beta} = \left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\nu}\Gamma^\nu_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\gamma\mu}\right)v^\mu$$

Den Term in Klammern bezeichnet man als den Riemannschen Krümmungstensor

Definition 3.17 (Riemannscher Krümmungstensor)**.**

$$R^\alpha_{\mu\beta\gamma} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\nu}\Gamma^\nu_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\gamma\mu}$$

Da die kovariante Ableitung ein Tensor ist und v^μ ein beliebiges Vektorfeld, ist nach dem Quotiententheorem der Riemannsche Krümmungstensor auch ein Tensor.

Definition 3.18 (flacher Raum)**.** Eine Mannigfaltigkeit heißt genau dann flach, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- In einem bestimmten Koordinatensystem ist die Metrik überall die Lorentz-Metrik.
- In einem bestimmten Koordinatensystem verschwindet der metrische Zusammenhang überall.
- In einem bestimmten Koordinatensystem ist der metrische Zusammenhang symmetrisch und integrabel, d.h. die Parallelverschiebung eines Vektors ist wegunabhängig.
- Der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet.

Wichtige Gleichung 3.19 (Eigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors). *Man erhält durch einfach Rechnungen folgende Eigenschaften:*

- ${R^\alpha}_{\mu\beta\gamma}$ *hat im 4-dimensionalen Raum i.Allg.* 20 *unabhängige Komponenten*
- $R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\mu}\right) + g_{\rho\lambda}\left(\Gamma^\rho_{\alpha\mu}\Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\rho_{\beta\mu}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\right)$
- *Erster Index oben: Antisymmetrie in den letzten beiden Indizes:* ${R^\mu}_{\nu\alpha\beta} = -{R^\mu}_{\nu\beta\alpha}$
- ***Alle Indizes unten**: Antisymmetrie in den ersten beiden Indizes* $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}$
- ***Alle Indizes unten**: Antisymmetrie in den letzten beiden Indizes* $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}$
- ***Alle Indizes unten**: Symmetrisch bei Vertauschen der Indexpaare:* $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$
- ${R^\mu}_{\nu\alpha\beta} + {R^\mu}_{\beta\nu\alpha} + {R^\mu}_{\alpha\beta\nu} = 0$ *und auch* $R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu} = 0$

In zwei Dimensionen hat der Riemmansche Krümmungstensor nur eine nicht-verschwindende Komponente, die R_{1212}*-Komponente.*

Definition 3.20 (Ricci-Tensor). Durch Verjüngung des Krümmungstensors erhält man den Ricci-Tensor

$$R_{\nu\beta} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta} = {R^\alpha}_{\nu\alpha\beta}$$

Der Ricci-Tensor ist symmetrisch:

$$R_{\nu\beta} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\beta\nu}$$

Definition 3.21 (Riemannscher Krümmungsskalar).

$$R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu}$$

3.8 Integrabilität - wegunabhängige Parallelverschiebung

Eine Mannigfaltigkeit hat im Allgemeinen die Eigenschaft, dass eine Parallelverschiebung eines Vektors entlang einer geschlossenen Kurve den ursprünglichen Vektor nicht mehr in sich selbst überführt, und zudem ist ein beliebig parallelverschobener Vektor wegabhängig. Das kann man direkt aus der Formel für den Paralleltransport, Gl.(60), entnehmen. Wir finden heraus, dass dies nicht gilt, wenn der Krümmungstensor verschwindet.

Satz 3.22 (Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung). *Der Paralleltransport eines Vektors ist genau dann unabhängig vom Transportweg (Zusammenhang ist integrabel), wenn der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet.*

Beweis.

1.) Wegunabhängigkeit $\rightarrowtail$ $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0$:

Der Paralleltransport sei wegunabhängig. Wir starten damit an einem Punkt mit einem Vektor v^{α} und konstruieren durch Verschiebung ein eindeutig definiertes Vektorfeld $v^{\alpha}(x^{\mu}$ in einer Umgebung um v^{α}. Mit Gl.(60) folgt für die Ableitungen des Vektorfeldes:

$$\frac{dv^{\alpha}}{dx^{\gamma}} = -\Gamma^{\alpha}_{\gamma j} v^{j}$$

Das bedeutet aber, dass die kovariante Ableitung verschwindet:

$$v^{\alpha}_{||\gamma} = \frac{\partial v^{\alpha}(x)}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma}\, v^{\rho}(x) = -\Gamma^{\alpha}_{\gamma j} v^{j} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\rho}\, v^{\rho}(x) = 0$$

Jetzt ergibt sich daraus natürlich auch

$$v^{\alpha}_{||\beta||\gamma} - v^{\alpha}_{||\gamma||\beta} = 0 = \left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\gamma\mu} \right) v^{\mu} = R^{\alpha}_{\mu\beta\gamma} v^{\mu}$$

Da v^{μ} beliebig ist, muss $R^{\alpha}_{\mu\beta\gamma} = 0$.

2.) $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0$ $\rightarrowtail$ Wegunabhängigkeit:

Wir starten bei einem Punkt x_a und betrachten zwei Wege einer infinitesimalen Verschiebung eines Vektors v^{μ} zu einem anderen Punkt x_e. Die **erste** Verschiebung soll erst in Richtung dx^{μ} zum Punkt x_1 erfolgen, danach in Richtung dy^{μ} zum Punkt x_e. Die **zweite** Verschiebung soll erst in Richtung dy^{μ} zum Punkt x_2 und *danach* in Richtung dx^{μ} zum Punkt x_e. Insgesamt schauen wir also vier infinitesimale Verschiebungen an. Wir beginnen also mit $v^{\mu}(x_a)$

1. In Richtung dx^{μ}:
$$v^{\mu}(x_1) = v^{\mu}(x_a) - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\big|_{x_a}\, dx^{\nu} v^{\lambda}(x_a)$$
Das Christoffelsymbol bei x_1 ist ja nun ein bisschen anders als bei x_a, man bekommt dafür einen Ausdruck, indem man es in erster Ordnung entwickelt:
$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\big|_{x_1} = \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\big|_{x_a} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\right) dx^{\alpha}$$

2. weiter von x_1 in Richtung dy^{μ}:
$$v^{\mu}(x_e) = v^{\mu}(x_1) - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\big|_{x_1}\, dy^{\nu} v^{\lambda}(x_1)$$
Darin kann man nun das durch die Entwicklung erhaltene $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\big|_{x_1}$ und auch $v^{\mu}(x_1)$ einsetzen (hier ist jeder Tensor bei x_a ausgewertet, deswegen werden die Argumente ab dem zweiten Schritt weggelassen):

$$
\begin{aligned}
v^\mu(x_e)\big|_{x_a\mapsto x_1\mapsto x_e} &= v^\mu(x_a) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\big|_{x_a} dx^\nu v^\lambda(x_a) \\
&\quad - \left(\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\big|_{x_a} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\right) dx^\alpha \right) dy^\nu \left(v^\lambda(x_a) - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\big|_{x_a} dx^\alpha v^\beta(x_a) \right) \\
&= v^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} dx^\nu v^\lambda - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} dy^\nu v^\lambda \\
&\quad - \Gamma^\mu_{\nu\lambda|\alpha} dx^\alpha dy^\nu v^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} dy^\nu \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} dx^\alpha v^\beta + \Gamma^\mu_{\nu\lambda|\alpha} dx^\alpha \Gamma^\lambda_{\rho\beta} dx^\rho v^\beta dy^\nu \\
&= v^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\left(dx^\nu + dy^\nu\right) v^\lambda - \Gamma^\mu_{\nu\lambda|\alpha} dx^\alpha dy^\nu v^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} dx^\alpha dy^\nu v^\beta
\end{aligned}
$$

Hier wurde außerdem $dx^\alpha dx^\rho = 0$ gesetzt.

3. Nun starten wir wieder bei x_a und gehen jetzt aber erst in Richtung dy^μ zu x_2...

4. Jetzt verschieben wir $v^\mu(x_2)$ in Richtung dx^μ zu x_e, und erhalten (einfach durch Umbenennung $dx^\mu \longleftrightarrow dy^\mu$, analog wie oben:

$$
v^\mu(x_e)\big|_{x_a\mapsto x_2\mapsto x_e} = v^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\left(dy^\nu + dx^\nu\right) v^\lambda - \Gamma^\mu_{\nu\lambda|\alpha} dy^\alpha dx^\nu v^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} dy^\alpha dx^\nu v^\beta
$$

Jetzt kann man sich anschauen, wie der Unterschied zwischen den beiden Verschiebungen aussieht, und erhält dabei den Riemannschen Krümmungstensor:

$$
\begin{aligned}
v^\mu(x_e)\big|_{x_a\mapsto x_1\mapsto x_e} - v^\mu(x_e)\big|_{x_a\mapsto x_2\mapsto x_e} &= \left(\frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\lambda} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\nu\lambda} \right) dx^\alpha dy^\nu v^\lambda \\
&= R^\mu_{\lambda\alpha\nu} dx^\alpha dy^\nu v^\lambda \qquad (61)
\end{aligned}
$$

Dieser Unterschied verschwindet also nur, wenn der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet. □

4 Die Einsteinschen Feldgleichungen

4.1 Energie-Impuls-Tensor

Wichtige Gleichung 4.1 (Energie-Impuls Tensor)**.** *Energie, bzw. Masse in der Relativitätstheorie wird tensoriell als Energie-Impuls-Tensor geschrieben.*

$$
T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \qquad (62)
$$

4.2 Deduktion der Feldgleichungen

Wir haben in der Abschätzung zu Gl.(25) einen Zusammenhang zwischen Newtonschen Gravitationspotential und metrischem Tensor hergestellt. Diese Überlegungen werden nun verfeinert. Mit einer Massendichteverteilung $\rho_0(\vec{r})$ kann man ein Poisson-Gleichung für das

Gravitationspotential aufstellen:

$$\triangle\Phi = 4\pi G\rho_0(\vec{r}) \equiv 4\pi G \sum M_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Mit $g_{00} \approx 1 + 2c^{-2}\Phi(\vec{r})$ folgt

$$\triangle g_{00}(\vec{r}) = \triangle \frac{2}{c^2}\Phi = \frac{8\pi G}{c^2}\rho_0(\vec{r}) \approx \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \tag{63}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ist die Massendichte mit der Energiedichte verknüpft, da $\rho_0 c^2 = E$, dies entspricht der 00-Komponente des Energie-Impuls-Tensors: $T_{00} = \rho_0(\vec{r})c^2$. Dies soll nun aber nur der Newtonsche Grenzfall (nichtrelativistischer Limes) einer allgemeineren Tensorgleichung sein. Folgende Forderungen sind an die zu suchende Gleichung gerichtet:

1. Die rechte Seite soll proportional zum Energie-Impuls Tensor sein. Er charakterisiert die Massen- und Energieverteilung im Raum.

2. Die linke Seite soll auch ein Tensor 2.Stufe sein, der höchstens 2.Ableitungen des metrischen Tensors enthält. Er soll den metrischen Tensor enthalten. Wir nennen ihn $G_{\mu\nu}$. Dieser Tensor soll ausserdem symmetrisch sein, da auch $T_{\mu\nu}$ symmetrisch ist. Desweiteren soll $G_{\mu\nu}$ wie auch der Energie-Impuls-Tensor divergenzfrei sein: $G_{\mu\nu||\gamma} = 0$.

3. Wenn wir im leeren, materiefreien Raum sind, $T_{\mu\nu} = 0$, dann soll die Lorentz-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ eine spezielle Lösung sein.

4. Der Newtonsche Grenzfall soll wie oben erklärt auftreten.

5. Die Feldgleichungen sollen eine eindeutige Lösung besitzen. Da eine algebraische Differentialgleichung genau dann eine eindeutige Lösung besitzt, wenn die höchste Ableitung **linear** auftritt, fordern wir, dass die zweiten Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ linear auftreten. Die DGL heißt dann quasi-linear.

Wir suchen nun nach plausiblen Möglichkeiten zur Konstruktion von $G_{\mu\nu}$.

4.2.1 Der Ansatz

Als erstes stellen wir fest, dass

$$\dim\left[\frac{8\pi G}{c^4}T_{00}\right] = \frac{1}{\text{Länge}^2}$$

Daher kann auch auf der linken Seite $G_{\mu\nu}$ nur zweite Ableitungen der (dimensionslosen) Metrik enthalten, oder quadratisch vorkommende erste Ableitungen. Es gilt ja $g_{\mu\nu||\nu} = 0$, deswegen muss man sich anders behelfen. Zwei Tensoren kommen in Frage:

- Die Forderungen sind genau beim Riemannschen Krümmungstensor erfüllt. Der einzige Tensor, der sich aus dem Riemannschen Krümmungstensor ergibt, ist der Ricci-Tensor:

$$g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}, \qquad \dim\left[R_{\mu\nu}\right] = \frac{1}{\text{Länge}^2} \tag{64}$$

  Wir sehen, er ist symmetrisch, und hat die richtige Dimension!

- Der metrische Tensor selbst ist symmetrisch, aber dimensionslos, aber mit einem passenden Skalar multipliziert, erhält man die richtige Dimension. Idealerweise nimmt man den einzigen vom Krümmungstensor abgeleiteten Skalar, den Krümmungssskalar

$$R = g^{\beta\nu}R_{\beta\nu} \qquad \dim\left[Rg_{\mu\nu}\right] = \frac{1}{\text{Länge}^2} \tag{65}$$

Man macht daher einen Ansatz

$$G_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu} \tag{66}$$

4.2.2 Die Einarbeitung weiterer Bedingungen

Wir bestimmen nun die dimensionslosen Konstanten a und b.

Satz 4.2 (Bianchi-Identitäten)**.**

$$R_{\alpha\mu\beta\gamma||\delta} + R_{\alpha\mu\delta\beta||\gamma} + R_{\alpha\mu\gamma\delta||\beta} = 0$$

Da immer ${g^{\alpha\beta}}_{||\gamma} = 0$ kann man mit $g^{\alpha\beta}g^{\mu\gamma}$ multiplizieren:

$$0 = {R^{\beta\gamma}}_{\beta\gamma||\delta} + {R^{\beta\gamma}}_{\delta\beta||\gamma} + {R^{\beta\gamma}}_{\gamma\delta||\beta} = R_{||\delta} - 2{R^{\gamma}}_{\delta||\gamma}$$

Damit gilt durch Umstellen:

$${R^{\gamma}}_{\delta||\gamma} = \frac{1}{2}R_{||\delta}$$

Da wir ja die Divergenzfreiheit von $G_{\mu\nu}$ gefordert hatten

$$G_{\mu\nu||\gamma} = G_{\nu\mu||\gamma} = G^{\nu}_{\mu||\gamma} = 0$$

insbesondere soll auch (die sog. kontrahierte Bianchi-Identität) gelten:

$$G^{\nu}_{\mu||\nu} = 0$$

Es folgt mit unserem Ansatz ($G^{\nu}_{\mu} = {G^{\nu}}_{\mu}$ wegen der Symmetrie):

$$G^{\nu}_{\mu||\nu} = a\underbrace{{R^{\nu}}_{\mu||\nu}}_{\frac{1}{2}R_{||\mu}} + bR_{||\nu}\underbrace{g^{\nu}_{\mu}}_{\delta^{\nu}_{\mu}} = \left(\frac{a}{2} + b\right)R_{||\mu} = 0$$

also $b = -\frac{a}{2}$. So lauten die gesuchten Feldgleichungen bis jetzt

$$G_{\mu\nu} = a\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{67}$$

Der *divergenzfreie Ricci-Tensor* $\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)$ und $g_{\mu\nu}$ sind die einzigen Tensoren 2.Stufe, die nur aus dem metrischen Tensor und dessen ersten beiden Ableitungen gebildet sind, und deren Divergenz verschwindet. Nun bestimmen wir die Konstante a aus der Betrachtung des Newton Grenzfalls. Wir betrachten die 00-Komponente:

$$G_{00} = a\left(R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00} \approx \frac{8\pi G}{c^2}\rho_0(\vec{r})$$

Wir betrachten nun den Krümmungstensor im Grenzfall $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| << 1$, mit

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sim \mathbb{O}(h_{\mu\nu}), \quad \Gamma \sim \mathbb{O}(h), \quad \Gamma\Gamma \sim \mathbb{O}(h^2)$$

und nehmen eine zeitlich konstante Metrik an

$$\frac{\partial g}{dx^0} = \frac{\partial g}{\partial ct} = 0$$

Damit erhält man aus

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\mu}\right) + g_{\rho\lambda}\left(\Gamma^\rho_{\alpha\mu}\Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\rho_{\beta\mu}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\right)$$

folgende Betrachtung einer Komponente des zugehörigen Ricci-Tensors

$$R_{i0i0} = R_{0i0i} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial (x^i)^2} + \mathbb{O}(h^2) \approx \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial (x^i)^2}$$

Weiterhin kann man mit den Näherungen berechnen

$$R^\alpha{}_{0\alpha 0} = R_{00} = g^{\alpha\beta}R_{\beta 0\alpha 0} \approx \eta^{\alpha\beta}R_{\beta 0\alpha 0} = R_{0000} - \sum_{i=1}^{3} R_{i0i0} = -\sum_{i=1}^{3} R_{i0i0}$$

da die (0000)-Komponente ja verschwindet (vgl. die Eigenschaften den Krümmungstensors). Damit haben wir

$$R_{00} \approx -\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial (x^i)^2} = -\frac{1}{2}\triangle g_{00} = -\frac{1}{2}\triangle h_{00} \approx -\frac{1}{c^2}\triangle\Phi(\vec{r})$$

Wir betrachten jetzt die 00-Komponente des Energie-Impuls-Tensors im Newtonschen Limes. Dabei gilt für die 4-Geschwindigkeit $u^\mu = \gamma(c, v^i) \approx (c, v^i)$. Der Druck soll gegenüber der Massendichte vernachlässigbar sein und die Geschwindigkeiten sollen alle klein sein $v^i << c$, deshalb erhalten wir

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \qquad T_{00} \approx \rho_0(\vec{r})c^2$$

Diese 00-Komponente ist im gesamten Energie-Impulstensor aus o.g. Gründen dominant! Nun möchten wir eine Kontraktion von $G_{\mu\nu}$ vornehmen, berechnen dazu aber erst die Kontraktion von $T_{\mu\nu}$, wobei der gleiche Trick wie bei Riemannschen Krümmungstensor vorher angewendet wird, bei dem man den metrischen Tensor einbaut, und approximiert:

$$T_0^0 = g^{0\alpha}T_{\alpha 0} \approx \eta^{00}T_{00} = T_{00}$$

Nun verjüngt man $G_{\mu\nu}$

$$G_\mu^\mu = a\left(R_\mu^\mu - \frac{1}{2}R\delta_\mu^\mu\right) = a(R - \frac{1}{2}R\cdot 4) = -aR = \frac{8\pi G}{c^4}T_\mu^\mu = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00}$$

Als Resultate halten wir fest:

- $-aR = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}aR = -\frac{4\pi G}{c^4}T_{00}$
- $R_{00} \approx -\frac{1}{c^2}\triangle\Phi(\vec{r}) \approx -\frac{1}{2}\triangle g_{00}$
- $\triangle g_{00}(\vec{r}) \approx \frac{8\pi G}{c^4}T_{00}$ (aus Gl.(63)
- $G_{\mu\nu} = a\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ von Gl.(67)

Nehmen wir die 00-Komponente der unvollständigen Feldgleichungen und ersetzen den Term aR, folgt

$$aR_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00} + \frac{1}{2}aRg_{00} \approx \frac{8\pi G}{c^4}T_{00} - \frac{4\pi G}{c^4}T_{00}\eta_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{00} - \frac{1}{2}T_{00}\right) = \frac{4\pi G}{c^4}T_{00}$$

ersetzt man nun R_{00} erhält man

$$a\left(-\frac{1}{2}\triangle g_{00}\right) \approx \frac{4\pi G}{c^4}T_{00}$$

dies kann man nun mit Gl.(63) vergleichen:

$$\triangle g_{00}(\vec{r}) \approx \frac{8\pi G}{c^4}T_{00}$$

Man sieht, dass

$$a = -1$$

sein muss! Damit kann man die vollständigen Einsteinschen Feldgleichungen aufstellen:

Wichtige Gleichung 4.3 (Einsteinsche Feldgleichungen)**.**

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{68}$$