Tensoren in der Physik – Vierter Teil

In den folgenden Abschnitten werden wir Tensoren in verschiedenen Anwendungen kennenlernen. Das betrachtete Objekt muß sich gemäß der Definition eines Tensors unter (evtl. eingeschränkte) Koordinatentransformationen transformieren.

1) Der Trägheitstensor in der klassischen Mechanik

Winkelgeschwindigkeit $\vec\omega$

starrer Körper: $$T = \frac{1}{2} M \underbrace{\vec{v}_s^{\,2}}_{\text{Schwerpunkt}} + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} (\omega^T)^\mu \, J_{\mu\nu}\, \omega^\nu$$

← Trägheitstensor

mit

vom Schwerpunkt aus gesehen

$$J_{\mu\nu} := \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\vec{x}_i^{\,2}\,\delta_{\mu\nu} - (x_i)_\mu (x_i)_\nu\right] \rightarrow \int d^3x\, \rho(x) \left[\vec{x}^{\,2}\,\delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu\right]$$

Unter Rotation des Koordinatensystems um den Schwerpunkt ist

← Rotations-matrix (3x3)

$$\bar{x}_\mu = R_{\mu\alpha}\, x_\alpha$$

$$\vec{\bar{x}}^{\,2} \,\hat{=}\, \sum_{\mu=1}^{3} \bar{x}_\mu \bar{x}_\mu = \sum_{\mu,\nu} \delta_{\mu\nu}\, \bar{x}_\mu \bar{x}_\nu = \sum_{\mu,\nu} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha,\beta} (R_{\mu\alpha} R_{\nu\beta})\, x_\alpha x_\beta \overset{!}{=} \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta}\, x_\alpha x_\beta$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu} \underbrace{R_{\mu\alpha}}_{\hat{=}(R^T_{\alpha\mu} = R^{-1}_{\alpha\mu})} R_{\mu\beta} = \delta_{\alpha\beta} \overset{R^T R}{=} \Rightarrow R_{\mu\alpha} = R^{-1}_{\alpha\mu} \Rightarrow \underline{\delta_{\alpha\beta}} = R R^{-1} = R_{\alpha\mu} R^{-1}_{\mu\beta} = \underline{R_{\alpha\mu} R_{\beta\mu}}$$

Damit

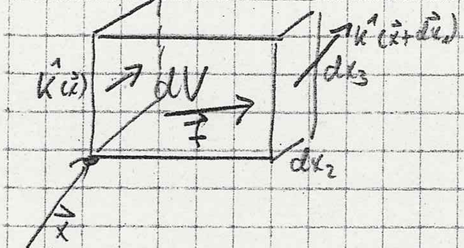
$$\bar{J}_{\mu\nu} \,\hat{=}\, \left[(\bar{x}_\sigma \bar{x}^\sigma)\,\delta_{\mu\nu} - \bar{x}_\mu \bar{x}_\nu\right] =$$

$$= \left[(x_\tau x^\tau)\, R_{\mu\alpha} R_{\nu\beta}\, \delta_{\alpha\beta} - R_{\mu\alpha} x_\alpha R_{\nu\beta} x_\beta\right]$$

$$= R_{\mu\alpha} R_{\nu\beta} \left[(x_\tau x^\tau)\,\delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta\right] = \underline{R_{\mu\alpha} R_{\nu\beta}\, J_{\alpha\beta}}\,,$$

was genau der (axiomatische) Definition eines Tensors 2-ter Stufe entspricht.

2) Der Spannungstensor



Gegeben sei ein Volumenelement dV in einem Kontinuum (Flüssigkeit, Gas, Kernmaterie etc.), auf dem eine Massenkraft $\vec{f}\cdot dV$ wirke. An den 6 Randflächen wirken Scherkräfte $\vec{K}^{(i)}(\vec{x}) = +\vec{t}^{(i)}(\vec{x})\, dF$

↖ Dimension eines Drucks, Spannung

Betrachten wir z.B. die Stirnfläche $dx_2 dx_3$ bei $\vec{x}$, so ist

$$\vec{K}^{1} = \vec{K}^{(1)}(\vec{x}) = +\vec{t}^{(1)}(\vec{x})\, dx_2 dx_3$$

und bei $\vec{x}+dx_1\vec{e}_1$:

$$K^{1}(\vec{x}+dx_1\vec{e}_1) \approx +\vec{t}^{(1)}(\vec{x})dx_2 dx_3 + (+)\frac{\partial \vec{t}^{(1)}}{\partial x^1} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\approx \vec{K}^{(1)}(\vec{x}) + \frac{\partial \vec{t}^{(1)}}{\partial x^1}\, dV$$

(Beachte: Die Kraft $\vec{t}^{(1)}$ auf die Stirnfläche $dx_2 dx_3$ muß nicht notwendigerweise in Richtung von $\vec{e}_1$ liegen, wenn auch intuitiv).

Gleichgewicht $\hat{=}$ Kräftegleichgewicht

$$\left(\frac{\partial \vec{t}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{t}^{(2)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{t}^{(3)}}{\partial x^3}\right) dV + \vec{f}\, dV \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{t}^{(i)}}{\partial x_i} + \vec{f} = 0$$

$\vec{t}^{(i)}$ läßt sich schreiben in der Koordinatenbasis $\vec{e}_i$ als

$$\vec{t}^{(i)} = \overbrace{\tau^{ij}(\vec{x})}^{\text{Spannungstensor}}\vec{e}_j \,,$$

sodaß im Gleichgewicht gilt

$$\boxed{\tau^{ij}{}_{|i} + f^{j} = 0} \quad - \text{ Materialstatik}$$

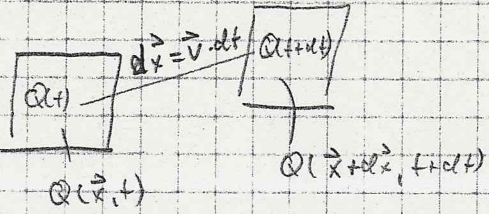
Dynamik: Bewege sich das Segment dV des Kontinuums mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}(t,\vec{x})$, und es habe eine (konstante) Massendichte ρ, so gilt die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\boxed{\rho \frac{dv^j}{dt} = f^j + \tau^{ij}{}_{|i}}$$

Dabei ist die ~~totale~~ Zeitableitung zu nehmen, i.e.

$$\frac{dv^j}{dt} = \frac{\partial v^j}{\partial t} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial v^j}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v^j \quad , \quad \frac{d}{dt} \hat{=} \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}) \quad ,$$

Eulersche Ableitung i.e. die zeitliche Änderung die ein mitströmender Beobachter feststellen würde.



3) Die Euler-Gleichungen der Hydrodynamik

ideale Flüssigkeit (keine Reibung, nur isotrope Normalspannung): $\tau^{ij} = -p(\vec{x},t)\,\delta^{ij}$ ← Druck

⇒ Dynamik idealer (inkompressibler) Flüssigkeit: ← äusseres Kraftfeld, z.B. $\vec{f} = -\rho g \vec{e}_3$ (Schwerkraft)

$$\rho\left[\frac{\partial v^j}{\partial t} + v^j{}_{|k} v^k\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + f^j \quad ,$$

Kompressible Flüssigkeit: $\rho \to \rho(\vec{x},t)$; Impulsdichte: $\rho\vec{v}(\vec{x},t) \to \rho(\vec{x},t)\,\vec{v}(\vec{x},t)$

Impulsstrom wie bei Rakete $m(t)v(t)$

$$\Rightarrow 1.)\ \left[\frac{\partial(\rho v^j)}{\partial t} + \underbrace{(\rho v^j)_{|k} v^k}_{\text{Impulsstrom}}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + f^j$$

$$2.)\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\cdot\vec{v}) = 0 \quad - \text{Kontinuitätsgleichung}$$

nichtrel. hydrodyn. Bewegungsgleichungen

aus 2.) folgt für ρ = const, $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, dies gilt auch hier; wirbelfreie Strömung

$\hookrightarrow$ 2') $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla}\rho)\cdot\vec{v} = 0$, $\operatorname{div}\vec{v} = 0$

+ Zustandsgleichung, i.e. $P(\rho)$

1') $[\ ]_{\partial t} = \frac{\partial(\rho v^j)}{\partial t} + (\rho v^j v^k)_{|k} \overset{2'),2)}{=} \rho\frac{\partial}{\partial t}(v^j) + \rho\, v^j{}_{|k} v^k = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + f^j$

4.) relativistische Hydrodynamik und der Energie-Impuls-Tensor

Ziel: (speziell) rel. Verallgemeinerung der hydrodyn. Bewegungsgleichung

→ Postulat der allg. Kovarianz: (allgemein) rel. Verallgemeinerung für beliebige Koordinaten

↓ Einfluß der Gravitation

$\vec{x} \to x^\mu = (x^0 = ct,\ x^i)$

$\vec{v} \to u^\mu = (u^0 = c\gamma,\ \gamma v^i)$

Wir definieren nun einen Vierer-Tensor 2-ter Stufe

$$M^{\alpha\beta} := \rho\, u^\alpha u^\beta \quad,$$

wobei $\rho = \frac{dm}{dV}$ im jeweiligen Ruhesystem des betrachteten Volumenelements genommen werden soll (und daher ein Skalar ist). Diese Definition erscheint sinnvoll: Zum einen wissen wir, daß in den Eulerschen Bewegungsgleichungen eine quadratische Form der Geschwindigkeit und Ableitung der Geschwindigkeit vorkommt, und andererseits daß Δm selbst 0-Komponente eines Vierervektors ist (des Impulsvektors $p^\mu = (\Delta m\, c, \Delta m\, \vec{v})$) und sich $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ deshalb wie die 00-te Komponente eines Vierertensors 2-ter Stufe transformieren soll ($1/\Delta V$ transformiert sich wie die 0-te Komponente eines Vierervektors).

Mehr anschaulich: $M^{00}_{\text{Ruhesystem}} = \rho c^2 = \frac{\Delta M c^2_{\text{Ruhe}}}{\Delta V_{\text{Ruhe}}} \xrightarrow{\text{Lorentz-Boost}} \frac{\gamma\, \Delta M c^2}{\underbrace{\Delta V = \frac{1}{\gamma}\Delta V_{\text{Ruhe}}}_{\text{Lorentzkontraktion}}} = \gamma^2 \rho c^2$

→ $\gamma^2 \rho c^2$ ist also so etwas wie die rel. Massendichte oder besser "Energiedichte".

Weiter bemerken wir, daß die Komponente M^{0i}, $i = 1,2,3$ genau die Dichte des im Lorentzkontrahierten Volumenelement enthaltenen Impulses darstellen:

$$M^{0i}\, d^3x = \rho_0 \gamma^2 v_i c \frac{1}{\gamma} d^3x_{\text{Ruhe}} = \rho_0 c\, d^3x_{\text{Ruhe}}\, \gamma v_i = \Delta M_{\text{Ruhe}}\, c\, \gamma v_i \mathrel{\hat{=}} \Delta p_i \cdot c$$

Ausgeschrieben haben wir:

$$M^{\alpha\beta} = \rho \gamma^2 c^2 \begin{pmatrix} 1 & v^1/c & v^2/c & v^3/c \\ v^1/c & & & \\ v^2/c & & \cdot & \frac{v^i v^k}{c^2} \\ v^3/c & & & \end{pmatrix}$$

Wir können den Tensor $M^{\alpha\beta}$ verwenden, um die Gleichung für die Erhaltung der Masse (Energie) und Impuls bei der Bewegung eines rel. Kontinuums in äußerst einfacher Form auszudrücken.
Betrachten wir dazu die Viererdivergenz $\partial_\beta M^{\alpha\beta}$:

{Kontinuitätsgleichung} — oder hier eigentlich Energieerhaltung (Teilchenzahl nicht so ergiebig in rel. Theorie; aber im n. rel. Grenzfall ist dies hier Kontinuitätsgleichung)

$$0\text{-te:}\quad \partial_\beta M^{0\beta} = c\left(\partial_t \tilde{\rho} + \partial_k(\tilde{\rho} v^k)\right) \qquad , \tilde{\rho} = \rho\gamma^2 \text{ – Energiemassendichte}$$

$$i\text{-te:}\quad \partial_\beta M^{i\beta} = \partial_t(\tilde{\rho} v^i) + \partial_k(\tilde{\rho} v^i v^k)$$

$$= (\tilde{\rho}\partial_t v^i + v^i\partial_t\tilde{\rho}) + \tilde{\rho} v^k\partial_k v^i + v^i\partial_k(\tilde{\rho} v^k)$$

$$= v^i\left(\partial_t\tilde{\rho} + \partial_k(\tilde{\rho} v^k)\right) + \tilde{\rho}\left(\partial_t v^i + \tilde{\rho}(\partial_k v^i)v^k\right)$$

Kontinuitätsgleichung (Energieerhaltung) — (kräfte)freie Eulersche Bewegungsgleichung

Wir ziehen daraus den Schluß, daß die Beziehung

$$\boxed{\partial_\beta M^{\alpha\beta} = 0 = M^{\alpha\beta}{}_{|\beta}} \quad \hat{=} \text{ Energie, Impulserhaltung}$$

die kräftefreien, d.h. auch Druckfreien Eulerschen-Bewegungsgleichungen relativistisch sinnvoll verallgemeinert.
Man bezeichnet vor daher auch $M^{\alpha\beta}$ als den freien Energie-Impulstensor, $M^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0$ die Erhaltung der Energie und des Impulses (dies läßt sich auch auf Feldtheorien übertragen).
Nun gilt es noch, konsistent den Druckterm spez. rel. zu verallgemeinern.

$$p^{ij} = \begin{pmatrix} p & & \\ & p & \\ & & p \end{pmatrix}, \quad \partial_j p^{ij} \hat{=} \vec{\nabla} p \quad \xrightarrow{\text{lok. Ruhesystem}} \quad p^{\alpha\beta}_{R.S.} \overset{\text{lok RS}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & & \\ 0 & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix}$$

Wir können nun $P^{\alpha\beta}$ in beliebige Koordinatensysteme durch das zu fordernde Tensorverhalten unter Lorentztransformation: $(P')^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu P^{\mu\nu}_{R.S.}$ berechnen. Einfacher ist aber die folgende Überlegung, $P^{\alpha\beta}$ muß sich aus (mehreren) Tensoren 2-ter Stufe aufbauen lassen. Die „einzige", die uns da einfallen, sind

$$P^{\alpha\beta} = \alpha\, u^\alpha u^\beta + \beta\, \eta^{\alpha\beta} \quad \text{(Lorentz-metrik)}$$

Da dies aber für $u^\mu = (c,0,0,0)$ in $P^{\alpha\beta}_{R.S.}$ übergehen muß, folgt unmittelbar

$$P^{\alpha\beta} = \frac{p}{c^2}\, u^\alpha u^\beta - p\,\eta^{\alpha\beta}$$

Der Druckgradiententerm in den Euler-Lagrange-gleichungen nimmt dann die einfache Form

$$-P^{\alpha\beta}{}_{|\beta}$$

an, so daß die rel. Bewegungsgleichungen lauten

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} = -P^{\alpha\beta}{}_{|\beta} + f^\alpha$$

$$\Rightarrow \partial_\beta(M^{\alpha\beta}+P^{\alpha\beta}) = \underbrace{(M^{\alpha\beta}+P^{\alpha\beta})}_{T^{\alpha\beta}}{}_{|\beta} = f^\alpha$$

Ist insbesondere kein äusseres Kraftfeld vorhanden, gilt dann "einfach" die elegante Form

$$\partial_\beta(M^{\alpha\beta}+P^{\alpha\beta}) = \boxed{T^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0}, \quad T^{\alpha\beta} = \left(\rho+\frac{P}{c^2}\right)u^\alpha u^\beta - P\eta^{\alpha\beta}$$

(mit innerem Druck)

für die Beschreibung einer relativistischen, idealen Flüssigkeit als rel. Verallgemeinerung der Euler-Gleichung, und bedeutet nichts anderes als Energie- und Impuls-Erhaltung, wobei der Druck-Tensor sozusagen der pot. Energie entspricht.

Die allgemein rel. Verallgemeinerung geschieht nun formal sehr einfach.

$$\boxed{T^{\alpha\beta} := \left(\rho+\frac{P}{c^2}\right)u^\alpha u^\beta - P g^{\alpha\beta}}$$

– sym. in den Indizes

$T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}=0$ (was im mitfallenden Bezugssystem gilt) $\xrightarrow{\text{allg. Kov. Postulat}}$ $\boxed{T^{\alpha\beta}{}_{||\beta}=0}$ (& Zustandsgleichung $P(\varepsilon) \equiv P(\rho)$)

Der Einfluß der Gravitation wird also nicht durch eine äußere Kraft f^α beschrieben (obwohl wir das hier auf der Erde durchaus spez. Relativistisch machen könnten), sondern ist explizit in der kovarianten Ableitung enthalten. Da die kovariante Ableitung des metrischen Tensors ja verschwindet, und ρ und P Skalare sind, folgt ausgeschrieben folgende hydrodynamische Bewegungsgleichung unter Beachtung von

$$\left.\begin{array}{ll} u^\beta{}_{||\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}\,u^\beta\right)_{|\beta}; & (\text{Skalar})_{||\beta} = (\text{Skalar})_{|\beta} \\ u^\alpha{}_{||\beta} = u^\alpha{}_{|\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\nu}u^\nu; & g^{\alpha\beta}{}_{||\beta} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Newtonsche Grenzfall: $\alpha = i$, $\Gamma^{i}_{00} \sim \nabla_i \Phi_{Gr} \Rightarrow \rho g$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\sqrt{|g|}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta\right] + \underbrace{\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} u^\beta u^\nu}_{\text{Gravitationseffekt}} - \frac{\partial P}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} = 0$$

Diese Gleichung bildet den Ausgangspunkt für die allgemein rel. Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten oder Gase in Gravitationsfeldern.

<u>Beispiel zur Vertiefung</u>: Betrachten Sie eine Flüssigkeit oder ein Gas in einem <u>stationären</u> Gravitationsfeld $g^{\mu\nu}$ im <u>hydrostatischen</u> Gleichgewicht ($\Rightarrow$ <u>Neutronensterne</u>, da dort Geschwindigkeit relativistisch und Gravitationsfeld groß). Betrachten Sie ferner den Newtonschen Grenzfall.

Stationär: <u>keine</u> x^0-Abhängigkeit

hydrostat. Ggw: " & $\boxed{u^i = 0}$, $i = 1,2,3 \Rightarrow c^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{00}(u^0)^2 \Rightarrow u^0 = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$

Aufgrund der Stationarität und $u^i = 0$ können wir schließen, daß der <u>erste</u> Term in der obigen Gleichung identisch verschwindet. Für $\beta = 0$ folgt dies, da die [ ] nicht von der x^0-Koordinate abhängt, für $\beta = i$ folgt dies, da $u^\beta = u^i(\vec{x}) \equiv 0$ für alle $\vec{x}$!

Es verbleibt

$$\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} u^\alpha u^\nu - \frac{\partial P}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) g_{\lambda\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} u^\alpha u^\nu - \frac{\partial P}{\partial x^\lambda} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) g_{\lambda\mu}\Gamma^{\mu}_{00}\frac{c^2}{g_{00}} - \frac{\partial P}{\partial x^\lambda} = 0$$

Für das Christoffelsymbol finden wir (wie schon bei der Diskussion des nichtrel. Grenzfalles)

$$\Gamma^{\mu}_{00} = \left\{ {\mu \atop 00} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha}\left\{\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right\} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) c^2 \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda}\cdot\frac{1}{g_{00}} + \frac{\partial P}{\partial x^\lambda} = 0}$$

– hydrostat. Gleichgewicht
"barometrische Höhenformel" allg. relativistisch

(benötigen wir später für Lösen der TOV-Gleichungen in Neutronensternen)

- Für $\lambda = 0$ gilt diese Gleichung trivial
- Für die räumlichen Komponenten folgt sofort

$$\boxed{\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\ln g_{00}) + \frac{1}{\rho c^2 + P}\vec{\nabla}P = 0}$$

(Falls $P = P(\rho) \equiv P(\epsilon)$ ← Energiedichte (was in der Regel für Neutronensterne angenommen wird)

$$\ln\sqrt{g_{00}}\,\Big|_{r_1}^{r_2} = -\int d\vec{r}\,\frac{\vec{\nabla}P}{\rho c^2 + P(\rho)} = -\int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho\,\frac{\frac{dP}{d\rho}}{\rho c^2 + P(\rho)}$$)

- Newtonscher Grenzfall: Nach unseren Betrachtungen zum nichtrel. Grenzfall ($g_{00} \approx 1$, $u^i = 0 \ll c$) erwarten wir, daß

$$g_{00}(\vec{r}) \approx 1 + \frac{2}{c^2}\phi_{Grav}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\ln g_{00}) = +\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\phi_{Grav}(\vec{r})$$

$P \ll \rho c^2$, i.e. Druck P sehr viel kleiner als Masse ($\equiv$ Energie-)Dichte, was für Sonne und Erde gilt
$\Rightarrow$

$$\underline{\rho\,\vec{\nabla}\phi_{Grav}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}P},$$

was das nichtrel. hydrostatische Gleichgewicht beschreibt, z.B. $\rho \cdot \vec{g}\, e_3 = -\vec{\nabla}P(\rho(z))$.

5) Die Maxwellgleichungen in kovarianter Form

inhomogenen MG:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho_c \quad \text{Ladung} \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{1}{c}\vec{j}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \quad \text{(Ladungs-) Kontinuitätsgleichung}$$

homogenen MG:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{H} = 0$$

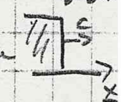
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$$

Weiter ist

$$\frac{1}{c^2}\partial_t(\partial_t\vec{E}) - \Delta\vec{E} = 0 \quad \hat{=} \ \Box\vec{E}$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_t(\partial_t\vec{H}) - \Delta\vec{H} = 0$$

Der D'Alembert-Operator ist sp. relativistisch invariant. Die Charakteristik, die in der Theorie der part. Differentialgleichungen eine grundlegende Rolle spielt, ist für die Wellengleichung gegeben durch $c^2t^2 - \vec{x}^2 \equiv 0$, d.h. eine mit c sich ausbreitende Kugelwellenfront. In der Tat wissen wir ja schon, daß die MG invariant unter Lorentz-Transformationen sind.



Da $(\nabla\times\vec{H})_i = \sum_{k,l=1}^{3}\epsilon_{ikl}\frac{\partial H_l}{\partial x^k}$ definiert man den sog. Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$

$$F^{00} = 0, \quad F^{0k} = E_k, \quad F^{i0} = -E_i, \quad F^{ik} = \sum_{l=1}^{3}\epsilon_{ikl}H_l \quad , \text{i.e.}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{"Minkowski"}$$

und den sog. Stromdichtevektor j^α:

$$j^\alpha = \left(\rho, \frac{1}{c}\vec{j}\right)$$

Man überprüft durch explizites Nachrechnen, daß

$$j^\alpha{}_{|\alpha} = 0 \quad \text{- die Kontinuitätsgleichung beschreibt und}$$

$$F^{\mu\nu}{}_{|\nu} = j^\mu \quad \text{- die inhomogenen MG ergibt}$$

Hierbei transformiert sich j^μ wie ein Vektor und $F^{\mu\nu}$ wie ein Tensor 2-ter Stufe unter Lorentztransformationen (insbesondere ändert sich ein $\vec{H}$ und $\vec{E}$-Feld ineinander, was auf den ersten Blick nicht so trivial ist).

Die homogenen MG werden durch den sog. dualen Feldtensor $^*F^{\mu\nu}$ $(\vec{E} \to -\vec{H},\ \vec{H} \to \vec{E})$ beschrieben,

$$^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} e^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$^*F^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0 \qquad \text{- die homogene MG.}$$

Zur Vollständigkeit sei noch der elektromagnetische Energie-Impuls-Tensor erwähnt:

$$S^{\mu\nu}_{e.m.} = \frac{1}{c^2} \left(F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \qquad \text{- sym. in den Indizes } \mu, \nu$$

$$T^{\mu\nu}_{Ges} = T^{\mu\nu}_{gel.\,Materie} + S^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu}_{Ges\,|\nu} = 0.$$

Getreu dem Äquivalenzprinzip und dem daraus implizierten Prinzip der allg. Kovarianz postulieren wir jetzt, daß die MG und die Energie-Impuls-Erhaltung nicht nur im Minkowski-Raum, sondern in beliebigen Gravitationsfeldern Gültigkeit haben.
$(\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}\ ;\ A_{|\nu} \to A_{||\nu})$.

Es ist wichtig, daß man sich klarmacht, daß dies mehr als eine formale math. Aussage ist. Vielmehr folgen aus diesem Postulat alle Vorhersagen über das Verhalten e.m. Wellen, z.B. Lichtwellen, Radarwellen im Gravitationsfeld. Exp. Untersuchungen dieses Verhaltens stellen einige der wichtigsten Tests der AR-Theorie dar (Lichtablenkung am Sonnenrand, Laufzeitverzögerung von Radarwellen im Sonnensystem, Rotverschiebung von Gammastrahlen etc.).

Zusammenfassung : Aufstellen von dynamischen Gleichungen in der Allg. Rel. Theorie

Umschreiben der Gleichungen in Tensorgestalt

↓

Prüfen der Invarianz unter Lorentz-Transformationen

↓

Umwandlung in allgemein kovariante Tensorgleichungen ← Prinzip der allg. Kovarianz

↓

Vorhersage des Verhaltens spez. Systeme im Gravitationsfeld

↓

Exp. Überprüfung der Vorhersagen

Bedenke, unsere Gravitationsfelder sind alle äußerst klein!