3) Tensoren, Tensoranalysis (Einheitlich)

- vier-dimensionaler Riemann-Raum mit Metrik

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i dx^k \quad , \quad g_{ik} = g_{ki} = g_{ik}(x^\ell)$$

- pseudo-euklidisch, d.h. falls Raum flach existiert Koordinaten sodaß

$$g_{ik} \to g_{\mu\nu} \hat{=} \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

allgemeine Kovarianz

Im letzten Kapitel haben wir die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt im Gravitationsfeld abgeleitet. Dabei sind wir von dem Äquivalenzprinzip ausgegangen, das besagt, daß in einem geeigneten 'mitfallenden' Koordinatensystem = Bezugssystem, die Bewegungsgleichung die einfache Form $\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$, wie in einem Inertialsystem, hat. In anderen Bezugssystemen haben wir dann die Bewegungsgleichung durch explizite Koordinatentransformation erhalten. Im Prinzip ließe sich dieses Verfahren auf alle gewünschten Gleichungen der Physik anwenden, das aber recht umständlich und etwas kompliziert.

=> Prinzip der allg. Kovarianz

Eine physikalische Gleichung in einem beliebigen Gravitationsfeld besitzt Gültigkeit, wenn

1.) die Gleichung in Abwesenheit eines Gravitationsfeldes in einem Inertialsystem (lokal) gilt, i.e. wenn $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ und $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$;

2.) die Gleichung allgemein kovariant ist, d.h. ihre Form unter allg. Koordinatentrafo behält.

(Gemäß dem Äquivalenzprinzips gibt es immer ein lokales Bezugssystem wo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ und damit $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$ für kleine Umgebung)

↳ auch die 1-ten Ableitungen verschwinden an dem Punkt?

Diese allg. Kovarianz besitzt eine andere Bedeutung als z.B. das Prinzip der Lorentzinvarianz?

Lorentzinvarianz: Gleichg. in einem Bezugssyst. ⇒ Lorentz-Trafo und ggf. ändere das allgemeingültige Gesetz so ab, daß auch in den neuen Koordinaten exakt dieselbe Form hat und nicht von der Koordinaten-Trafo abhängt. Insbesondere fällt die Geschwindigkeit der Lorentz-Trafo heraus.
⇒ starke Einschränkung der zulässigen Gleichungen.

allg. Kovarianz: (dynamisches Symmetrieprinzip wie z.B. auch lok. Eichinvarianz in Eichfeldtheorien).
Hierzu fordern wir, daß die Gleichg. zwar dieselbe Gestalt hat, aber ihre einzelnen Bestandteile ("Größen") wie z.B. $g_{\mu\nu}(x)$, $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$ etc. sowohl von den Koordinaten-Trafos abhängen können (oder gar sollen), da sie ja die Gravitation (Schwerkraft), also mithin die Koordinatenabhängigkeit explizit berücksichtigen.
(soll natürlich für infinitesimale Größen gelten, deren Änderung übrigens die Änderung des Gravitationsfeldes sind).

⇒ eine mögliche Darstellung – Tensorgleichungen

Beispiele: Viergeschwindigkeitstensor, Energie-Impuls-Tensor, Stress-Tensor ...
(obwohl hier eingeschränkte Koordinatentransformationen)

Am einfachsten lässt sich herstellen, daß sich die räumliche Größe unmittelbar mit den Raum-Zeit-Koordinaten zusammenhängen und sich daher ähnlich wie die Koordinaten transformieren.

Aber: Starke Einschränkung an mögliche Objekte

Tensoren

$$\bar{x}^j = f^j(x^i,\ i=1,\dots,n) \quad\longleftrightarrow\quad x^k = h^k(\bar{x}^i,\ i=1,\dots n)$$

(später $j \to \mu$ von $\mu = 0, \dots 3$)

Größe, die unter Koordinatentrafos invariant bleiben heißen Skalare.

z.B. 1) Konstante wie $\alpha = 1/137$, $G = \dots$ etc

2) skalare Felder $\phi(x^i)$, z.B. Temperatur

3) infin. Abstandsquadrat $ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k$

$\Rightarrow g_{ik}, dx^i, dx^k$ müssen sich so transformieren, daß ds^2 invariant bleibt.

Die Größe mit dem nächst einfachen Transformationsverhalten sind die Vektoren.

Kontravariante Vektoren: Betrachte infin. Verrückung zwischen Punkt A $\{x^i\}$ und Punkt B $\{x^i + dx^i\}$:

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\, dx^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\, dx^j \qquad \left(\text{bzw. } dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\, d\bar{x}^i\right)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\bar{u}^{\overset{\text{oben}}{i}}(\bar{x}^k) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\, u^j(x^k)}$$

Definition zum Transformationsverhalten eines kontravarianten Vektors, i.e. jede physik. Größe die sich so unter Koordinatentrafo transformiert heißt kontravarianter Vektor.

($a u^i + b v^i$ ≙ kontravar. Vektor, falls $a(x^i)$ und $b(x^i)$ skalare Größen sind.)

Kovariante Vektoren: Betrachte Gradient einer skalaren Größe, i.e. $w_i \equiv \frac{\partial \phi(x^i)}{\partial x^i}$

$$\Rightarrow \bar{w}_i(\bar{x}^j) = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \phi(\bar{x}^i)}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \phi}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\, w_j$$

$$\boxed{\underset{\text{unten}}{\bar{w}_i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\, w_j}$$ — Trafoverhalten eines kovarianten Vektors

bzw. $w_i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\, \bar{w}_j$

④

Bezüglich des Indizes ... der Indizes

Theorem: $\left(\sum_i\right) w_i u^i$ verhält sich wie ein Skalar

$$P = w_i u^i \Rightarrow \bar{P} = \bar{w}_i \bar{u}^i = \underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}}_{=\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta_{kj} \hat{=} \delta^k_j} w_k u^j = \delta^k_j w_k u^j = w_k u^k = P$$

- Wir gehen jetzt von einem Satz kovarianter und kontravarianter Vektoren in einem n-dim Raum aus.

Wir bilden die multilineare Form

$$P = \left(T^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b}\right)\left(u^{j_1}_{(1)} \dots u^{j_b}_{(b)}\right)\left(w^{(1)}_{i_1} \dots w^{(a)}_{i_a}\right),$$

wobei $u^{j_c}_{(c)}$ die j_c-Komponente des beliebigen Vektors $u_{(c)}$ bedeutet.

$T^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b}$ ist ein Satz von n^{a+b}-Elementen mit a oberen und b unteren Indizes, die kontravariant und kovariant genannt werden.

Durch Definition legen wir fest, daß die Größe $T^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b} \hat{=} T$ die Komponenten eines Tensors bilden, wenn sie sich bei einem Wechsel des Koordinatensystems so transformieren, daß P invariant bleibt und dies für beliebige u's und w's gilt.

axiomatische Definition

T habe den Rang $(a+b)$ mit a kontravarianten und b kov. Indizes

Bemerkungen

1.) Tensor vom Rang 0 ist ein Skalar.

2.) " " " 1 ist entweder kontravariant oder kovariant.

$P = T^i w_i$ ist jedenfalls ein Skalar.

3.) g_{ik}, $ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$, g_{ik} also kovarianter Tensor vom Rang 2, aber dies ist so noch nicht vollständig, da dies für beliebige $u^i_{(1)}, u^k_{(2)}, u_{(1)} \neq u_{(2)}$ gelten muß.

Betrachte $dx = dx_{(1)} + dx_{(2)}$

$$\Rightarrow \underset{\text{Skalar}}{ds^2} = \underset{\text{Skalar}}{ds^2_{(1)}} + \underset{\text{Skalar}}{ds^2_{(2)}} + \underbrace{2\, g_{ik}\, dx^i_{(1)} dx^k_{(2)}}_{\text{muß also auch Skalar sein}} \Rightarrow g_{ik} \text{ ist Tensor, da}$$

$dx^i_{(1)}$ und $dx^k_{(2)}$ beliebig ?

Aus der Invarianzforderung der Größe P bei Koordinatentransformation folgt nun

$$\bar T^{i_1\ldots i_a}_{j_1\ldots j_b}\left(\bar u^{j_1}_{(1)}\ldots \bar u^{j_b}_{(b)}\right)\left(\bar w^{(1)}_{i_1}\ldots \bar w^{(a)}_{i_a}\right) \overset{!}{=} T^{i_1\ldots i_a}_{j_1\ldots j_b}\left(u^{j_1}_{(1)}\ldots u^{j_b}_{(b)}\right)\left(w^{(1)}_{i_1}\ldots w^{(a)}_{i_a}\right)$$

mit $\bar u^j = \frac{\partial \bar x^j}{\partial x^\beta} u^\beta$, $\bar w_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar x^i} w_\alpha$ und Umbenennung von $i \to \beta$, $j \to \alpha$ auf der linken Seite

ergibt

$$\left[\left(\bar T^{i_1\ldots i_a}_{j_1\ldots j_b}\right)\left(\frac{\partial\bar x^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial \bar x^{j_b}}{\partial x^{\beta_b}}\right)\left(\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{\alpha_a}}{\partial\bar x^{i_a}}\right) - T^{\alpha_1\ldots\alpha_a}_{\beta_1\ldots\beta_b}\right]\cdot\left(u^{\beta_1}_{(1)}\ldots u^{\beta_b}_{(b)}\right)\left(w^{(1)}_{\alpha_1}\ldots w^{(a)}_{\alpha_a}\right) =$$

Da $u^{(j)}$, $w^{(i)}$ beliebig wählbar, folgt daß die Klammer verschwinden muß.

Unter Beachtung von

$$\frac{\partial\bar x^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar x^{l}} = \delta^{j_1}_{l}$$

findet man schließlich das Transformationsverhalten in expliziter Form

$$\boxed{\bar T^{k_1\ldots k_a}_{l_1\ldots l_b} = \left(\frac{\partial \bar x^{k_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial\bar x^{k_a}}{\partial x^{\alpha_a}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial\bar x^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial \bar x^{l_b}}\right)T^{\alpha_1\ldots\alpha_a}_{\beta_1\ldots\beta_b}}$$

- jede einzelne Komponente transformiert sich wie ein ko- oder kontravarianter Tensor
- $\bar T^{\alpha\beta}_{\gamma} = \frac{\partial\bar x^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \bar x^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^\gamma} T^{ij}_k$ Tensoralgebra
- $T^{\alpha\beta}_\gamma = u^\alpha v^\beta w_\gamma$ ist ein Tensor vom Rang 3 mit 2 kontra- und ein kovarianten Index
- $A^{\alpha\beta}_\gamma + B^{\alpha\beta}_\gamma = C^{\alpha\beta}_\gamma$ wieder Tensor
- $G^{\alpha\beta\mu\nu}_\gamma = T^{\alpha\beta}_\gamma S^{\mu\nu}$ — direktes Produkt oder auch äußeres Produkt — ist ebenfalls Tensor (Rang 5, vier kontra, ein kov. Index)
- $A^{\alpha\beta}_\gamma = B^{\alpha\beta}_\gamma$ zwei Tensoren sind gleich, wenn sie in einem Bezugssystem einander gleich sind (notwendig und hinreichend)!

Dies stellt mit die größte Bedeutung für das Kovarianzpostulat allgemeingültiger Gleichungen dar! (Man mache sich das klar).

"Gesetze" wie $T_{\mu\nu}=2$, $V^\mu = u_\mu$ mache daher von vornherein keinen Sinn.

(Ausnahme: $T_{\mu\nu}=0$ gilt in allen Koordinatensystemen).

Die weitreichenden Konsequenzen des tensoriellen Verhaltens einer Größe machen es erforderlich, sorgfältig zu prüfen, ob ein gegebener Ausdruck sich wirklich wie ein Tensor transformiert. Dabei kann man Überraschungen erleben, denn nicht jede Größe mit Indizes ist wirklich ein Tensor.

z.B. die affinen Übertragungen $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ sind keine Tensoren

Dies ist sofort einsichtig, da die $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ ja im geodätischen System gerade alle 0 sind, nicht aber in anderen Bezugssystemen. Wäre es ein Tensor, so wäre es in jedem Bezugssystem 0:

$$\bar\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial\bar x^\mu\partial\bar x^\nu} = \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\bar x^\lambda}{\partial x^\rho}\right)\frac{\partial x^\sigma}{\partial\bar x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial x^\tau}{\partial\bar x^\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\tau}\right) \quad \leftarrow \text{zu Vertiefen}$$

$$= \frac{\partial\bar x^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\bar x^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^\alpha}\left(\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x^\sigma\partial\bar x^\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\tau}+\frac{\partial x^\tau}{\partial\bar x^\nu}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\sigma\partial x^\tau}\right)$$

$$= \frac{\partial x^\sigma}{\partial\bar x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial x^\tau}{\partial\bar x^\nu}\right)\frac{\partial\bar x^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\tau} + \frac{\partial\bar x^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\bar x^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial\bar x^\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\tau}$$

$$= \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial\bar x^\mu\partial\bar x^\nu}\frac{\partial\bar x^\lambda}{\partial x^\tau} + \quad \parallel$$

Aufgrund von

$$\frac{\partial x^\tau}{\partial\bar x^\alpha}\frac{\partial\bar x^\alpha}{\partial x^\sigma}=\delta^\tau_\sigma \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\bar x^\mu}\left(\frac{\partial x^\tau}{\partial\bar x^\alpha}\frac{\partial\bar x^\alpha}{\partial x^\sigma}\right)=\frac{\partial^2x^\tau}{\partial\bar x^\mu\partial\bar x^\alpha}\frac{\partial\bar x^\alpha}{\partial x^\sigma}+\frac{\partial x^\tau}{\partial\bar x^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar x^\mu}\left(\frac{\partial\bar x^\alpha}{\partial x^\sigma}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial\bar x^\mu\partial\bar x^\alpha}\frac{\partial\bar x^\alpha}{\partial x^\sigma} = -\frac{\partial x^\tau}{\partial\bar x^\alpha}\frac{\partial x^\rho}{\partial\bar x^\mu}\frac{\partial^2\bar x^\alpha}{\partial x^\rho\partial x^\sigma} \overset{\frac{\partial x^\sigma}{\partial\bar x^\nu}\frac{\partial\bar x^\lambda}{\partial x^\tau}}{\Longrightarrow} \frac{\partial^2x^\tau}{\partial\bar x^\mu\partial\bar x^\nu}\frac{\partial\bar x^\lambda}{\partial x^\tau} = -\frac{\partial x^\sigma}{\partial\bar x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial\bar x^\mu}\frac{\partial^2\bar x^\lambda}{\partial x^\rho\partial x^\sigma}$$

und somit

$$\bar\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{\partial\bar x^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\bar x^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial\bar x^\nu}}_{\text{wie ein Tensor}}\Gamma^\rho_{\sigma\tau} - \underbrace{\frac{\partial x^\sigma}{\partial\bar x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial\bar x^\mu}\frac{\partial^2\bar x^\lambda}{\partial x^\rho\partial x^\sigma}}_{\text{nicht tensoriell!}}$$

Beispiel zur Vertiefung:

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \qquad \text{ist allgemein kovariant}$$

1.) Im Minkowski-Raum ist $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{const} \Rightarrow \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$
kräftefreie gleichförmige Bewegung, i.e. Geodäte

2.) Koordinatentransformation: $x \to \bar{x}$

$$\frac{d\bar{x}^\lambda}{d\tau} = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}$$ — 1-te Ableitung verhält sich wie ein Tensor

$$\frac{d^2\bar{x}^\lambda}{d\tau^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}$$ — 2-te Ableitung verhält sich nicht mehr wie ein Tensor

Damit

$$\ddot{\bar{x}}^\lambda + \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}\dot{\bar{x}}^\mu\dot{\bar{x}}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\ddot{x}^\alpha + \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$$

$$+ \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\nu}\left(\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\tau} - \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\tau}\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha\right)\left(\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta\right)$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\ddot{x}^\alpha + \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + \left(\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\left(\ddot{x}^\rho + \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\right) = 0$$

Die linke Seite transformiert sich also wie ein kontravarianter Vektor!
Das nichttensorielle Verhalten von $\ddot{x}^\lambda$ wird gerade durch das nicht-tensorielle von $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ kompensiert!

- $\delta_l^{\,k}$ ist Tensor vom Rang 2

<u>Beweis</u>: $\bar{\delta}_j^{\,k} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\delta_k^{\,l}$

- 1) Für einen <u>sym.</u> Tensor vom Rang 2 (beide Komp. entweder ko- oder kontravariant) gilt:

$A^{mn} = A^{nm}$

2) antisym.: $A^{mn} = -A^{nm}$

3.) jedes beliebige Tensor vom Rang 2 kann in einen sym. und antisym. Anteil zerlegt werden.

$A^{mn} = \frac{1}{2}\left(A^{mn} + A^{nm}\right) - \frac{1}{2}\left(A^{mn} - A^{nm}\right)$

- <u>Satz</u> (ohne Beweis → siehe Adler):

Jedes Tensor mit Rang $q > 1$ läßt sich als Summe von

maximal $\to n^{q-1}$ Tensor-Produkte aus jeweils q-Vektoren schreiben!

Kontraktion von Tensoren und das Quotiententheorem

Betrachte Tensor $T^{i_1\dots i_a}_{j_1\dots j_b}$ vom Rang $a+b$.

Konstruiere

$T^{i_1\dots i_{a-1}\sigma}_{j_1\dots j_{b-1}\sigma}$, i.e. kontrahiere zwei Indizes (o.B.d.A. die letzten zwei) "verjünge"

Behauptung: Dies ist ein Tensor vom Rang $a+b-2$ mit $a-1$ kontravarianten und $b-1$ kovarianten Indizes

$$\bar T^{i_1\dots i_{a-1}\sigma}_{j_1\dots j_{b-1}\sigma} = \left(\frac{\partial \bar x^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial \bar x^{i_{a-1}}}{\partial x^{\alpha_{a-1}}}\frac{\partial \bar x^{\sigma}}{\partial x^{\alpha_a}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_{b-1}}}{\partial \bar x^{j_{b-1}}}\frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial \bar x^{\sigma}}\right)T^{\alpha_1\dots\alpha_a}_{\beta_1\dots\beta_b}$$

$$\delta^{\beta_b}_{\alpha_a}$$

$$= \left(\frac{\partial \bar x^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial \bar x^{i_{a-1}}}{\partial x^{\alpha_{a-1}}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_{b-1}}}{\partial \bar x^{j_{b-1}}}\right)T^{\alpha_1\dots\alpha_{a-1}t}_{\beta_1\dots\beta_{b-1}t} \qquad \text{q.e.d.}$$

Beispiel: 1) $\bar B^i_i = \frac{\partial \bar x^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^i}B^k_l = \frac{\partial x^l}{\partial x^k}B^k_l = \delta^l_k B^k_l = B^k_k$

2) $c^2 d\tau^2 = \underbrace{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}_{\text{verjüngt}}$ ist Tensor 0-ter Stufe

Beachte: Es ist wichtig welcher Index verjüngt wird: $T^{\alpha\beta\gamma}_{\gamma} \neq T^{\alpha\gamma\beta}_{\gamma} \neq T^{\gamma\alpha\beta}_{\gamma}$ (in der Regel)

Quotiententheorem

Spezialfall: $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_r}$ sei ein Objekt der Dimension n^{p+r} mit gewisser Transformationseigenschaft (nicht näher spezifiziert)

Sei u^i ein beliebiger Vektor. Ferner sei S

$S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{r-1}} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_r}u^{j_r}$ ein Tensor für beliebige u. Dann ist auch T ein Tensor?

Zum Beweis: Multipliziere die Gleichung mit beliebigen p kontravarianten Vektoren und $r-1$ kovarianten Vektoren und verjünge entsprechend. Da S ein Tensor, ist der gesamte Ausdruck ein Skalar, i.e.

$P = T \otimes u_{(1)} \dots u_{(r)} \otimes w_{(1)} \dots w_{(p)}$

Aus der Transformationseigenschaft des Skalars folgt dann aufgrund der axiomatischen Definition, daß T ein Tensor sein muß.

Allgemeiner Fall: T wieder ein Objekt mit (nicht näher spezifizierter) Transformationseigenschaft. A sei ein beliebiger Tensor, und bilde

$$S^{i_1 \dots i_{k-1}}_{j_1 \dots j_{l-1}} = T^{i_1 \dots i_{k-1} i_k \dots i_p}_{j_1 \dots j_{l-1} j_l \dots j_r} A^{j_l \dots j_r}_{i_k \dots i_p}$$

, wobei S für beliebige A sich wie ein Tensor transformiert, dann ist auch T ein Tensor.

Beweis: Schreibe z.B. $A = u^{j_l}_{(l)} \dots u^{j_r}_{(r)} \cdot w_{i_k}^{(k)} \dots w_{i_p}^{(p)}$ ← beliebige Vektoren

$\Rightarrow$ selber Beweis.

Der metrische Tensor (oder Fundamentaltensor)

In diesem Abschnitt wollen wir die fundamentale Bedeutung des metrischen Tensors etwas näher beleuchten.

Zur Erinnerung: Aus unseren physikalischen Überlegungen des letzten Kapitels fanden wir

gravitationsfreie Koordinaten; ← Lorentz-Metrik

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \bar g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \bar x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \bar x^\nu}\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta}{\partial \bar x^\mu \partial \bar x^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\beta} g_{\gamma\rho} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar x^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar x^\nu} g_{\gamma\rho}$$

inverse

Definiere: $$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta}\eta^{\alpha\beta} \Rightarrow \bar g^{\mu\nu} = \frac{\partial \bar x^\mu \partial \bar x^\nu}{\partial x^\gamma \partial x^\rho} g^{\gamma\rho}$$

$$\Rightarrow \bar g^{\mu\lambda}\bar g_{\lambda\nu} = \frac{\partial \bar x^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar x^\nu} g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\tau} \hat= \frac{\partial \bar x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\tau}{\partial \bar x^\nu}\underbrace{\eta^{\alpha\sigma}\eta_{\sigma\tau}}_{\delta^\alpha_\tau} = \frac{\partial \bar x^\mu}{\partial \bar x^\nu} = \delta^\mu_\nu$$

Der so konstruierte bzw. definierte Tensor $g^{\mu\lambda}$ bildet also in der Tat den inversen Tensor zu $g_{\lambda\nu}$ in jedem Bezugssystem.

Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ spielt eine wichtige Rolle in der Tensoranalysis. Er ist direkt mit dem Koordinatensystem verknüpft und spielt daher, neben den beiden "fundamentalen Vektoren" dx^μ und $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ die Rolle eines "Fundamentaltensors". Der Tensor $g_{\mu\nu}$ kann dabei verwendet werden, einen kontravarianten Index eines Tensors in einen kovarianten umzuwandeln, d.h. die Indices "herunterzuziehen" oder zu "heben".

z.B.

$$T^{\mu}{}_{\nu} = g_{\nu\lambda} T^{\mu\lambda}$$

$$T_{\mu}{}^{\nu} = g_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu}$$

} in der Regel unterschiedlich?

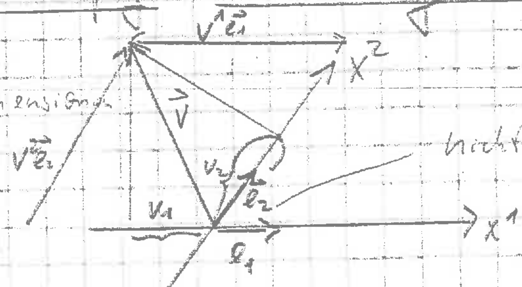
$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} T^{\lambda\sigma}$$

$T^{\mu}{}_{\nu}$, $T_{\mu}{}^{\nu}$ stellen sog. assoziierte Tensoren zu $T^{\mu\lambda}$ dar. Sie enthalten im Prinzip nichts "Neues", da sie ja sofort mittels $g^{\mu\nu}$, dem Inversen, indiziert werden können.

Im Prinzip ist die Wahl des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ beliebig. Ist er jedoch einmal fixiert (im Sinne Riemanns $\overbrace{\text{definiert er}}^{\text{i.e. metrischer Raum}}$ ja die "Fläche"), spielt er eine wesentliche Rolle in der Tensoranalysis. Er etabliert die Beziehung zwischen kontravarianten und kovarianten Formen desselben Tensors (oder auch Fundamentaltensor). Dies liegt an seiner besonderen Bedeutung für die Beschreibung der Geometrie des Raumes.

Zur Vertiefung: Zusammenhang zur Vektorrechnung in euklid. Geometrie

2 Dimensionen



nicht notwendigerweise Einheitsvektoren

kontravariante Komponente

1) $\vec V = V^1 \cdot \vec e_1 + V^2 \cdot \vec e_2$ 1-te Darstellung des Vektors

2) $V_1 = \vec V \cdot \vec e_1$, $V_2 = \vec V \cdot \vec e_2$ definiert auch vollständig den Vektor $\vec V$ mittels seiner Lote.

kovariante Komponente

Betrachte das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec u, \vec v$, i.e.

$$\vec u \cdot \vec v = (u^1 \vec e_1 + u^2 \vec e_2)(v^1 \vec e_1 + v^2 \vec e_2) = u^1 v^1 \vec e_1 \cdot \vec e_1 + u^1 v^2 \vec e_1 \cdot \vec e_2 + u^2 v^1 \vec e_2 \cdot \vec e_1 + u^2 v^2 \vec e_2 \cdot \vec e_2$$

Sei $g_{ij} \equiv \vec e_i \cdot \vec e_j$

$$\Rightarrow \vec u \cdot \vec v = g_{ij} u^i v^j$$

Es ist ebenso auch

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2) = v^1\,\vec{u}\cdot\vec{e}_1 + v^2\,\vec{u}\cdot\vec{e}_2 = u_1 v^1 + u_2 v^2 = u_i v^i$$

Da $\vec{v}$ beliebig wählbar $\Rightarrow$ $\boxed{u_i = g_{ij}\, u^j}$

- Betrachte wir neue (Einheits)vektoren $\vec{\bar{e}}_1, \vec{\bar{e}}_2$:

$$\vec{\bar{e}}_i = A_{ij}\,\vec{e}_j \qquad \text{, selbe Relationen gelten } \uparrow$$

$\Rightarrow$ 1.) $\vec{v} = \bar{v}^i\,\vec{\bar{e}}_i \overset{!}{=} v^i\,\vec{e}_i \quad \Rightarrow \quad v^j = A_{ij}\,\bar{v}^i$ bzw. $\underline{\bar{v}^i = (A^{-1})_{ji}\, v^j}$

2.) $\bar{v}_i = \vec{v}\cdot\vec{\bar{e}}_i = \vec{v}\cdot A_{ij}\,\vec{e}_j = \underline{A_{ij}\, v_j}$

3.) $\bar{g}_{ij} = \vec{\bar{e}}_i\cdot\vec{\bar{e}}_j = A_{ki}\,A_{lj}\,\vec{e}_k\,\vec{e}_l = \underline{A_{ki}\,A_{lj}\,g_{kl}}$

- $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ folgt unmittelbar

nicht notwendigerweise

$\Rightarrow$ g_{ij} definiert lokal das Skalarprodukt von (Einheits)-Tangentialvektoren, welche einen lokalen tangentialen Euklidischen Raum aufspannen.

Tensorfelder in Riemannschen Räumen – die kovariante Ableitung ∇

Tensorfeld: $T^{ik}(x^1,\dots,x^n)$, $V^i(x^1,\dots,x^n)$ ...

Problematik: Wann ist ein Vektorfeld (Tensorfeld) konstant?
Wann sind Vektoren parallel?

1.) Illustration $\Rightarrow$ konstante Länge?

konstante Komponenten

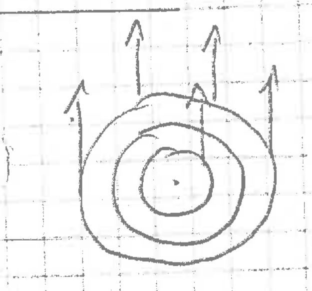
$$V^{(1)}(P) = (dx^1, 0..) \Rightarrow ds^2_{(P)}: g_{11}(P)(dx^1)^2$$
$$V^{(1)}(Q) = (dx^1, ..0) \Rightarrow ds^2(Q) = g_{11}(Q)(dx^1)^2$$
gleich: $g_{11}(P) = g_{11}(Q)$

$V^{(i)}: g_{ii}(P) = g_{ii}(Q)$

$V^{(i)}+V^{(j)}: g_{ij}(P) = g_{ij}(Q)$ $\Rightarrow$ $g_{ij}(x^i) = const$
i.e. pseudo-euklidisch

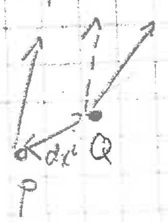
aber für beliebig andere Koordinatensysteme $\bar{x}^i$: $g_{ij} \to \bar{g}_{ij}$ ist dies sicherlich nicht mehr der Fall

2.) Illustration $\Rightarrow$ Parallelität



Komponenten eines konstanten Vektorfeldes (im euklidischen Raum) sind in Polarkoordinaten alles andere als konstant ...!

• Die "Ableitung" sollte so etwas wie die Abweichung des Vektors (Tensors) von seinem "parallelverschobenen" gleichen Vektor messen



"$V^i(Q) - V^i(P \to Q)$"

Wir gehen nun explizit in einen 4-dim physikalische Raum und verzichten auf die Verallgemeinerung auf n-dim Räume

- Skalar: $\phi(x^\mu)$, $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \hat{=} \phi_{|\mu} = u_\mu$ ist ein kovarianter Vektor per Definition

- Betrachten wir nun die Ableitung eines Vektors, i.e. den Vierergradient.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} \bar{V}^\nu(x) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} \left(\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} V^\beta \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} V^\beta \right) =$$

$$= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} \underbrace{\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha}}_{\substack{\text{transformiert sich} \\ \text{wie Tensor } T^\beta_\alpha}} + \underbrace{\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial^2 \bar{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta}_{\text{keine Tensortransformation, aber erinnert an Christoffel-Symbole}}$$

Können wir einen echten Tensor konstruieren ...?!

Gehen wir dazu (als physikalische Motivation) wieder von dem Äquivalenzprinzip aus und setzen uns zunächst in ein lokales Inertialsystem (wo $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$, hinreichend kleine Umgebung)

Wir definieren uns nun einfach einen Ableitungstensor, indem wir die Größe

$$T_{I\,\alpha}^{\ \ \beta} = \frac{\partial V_I^\beta}{\partial \xi^\alpha}$$

in dem spez. Inertialsystem als Ableitung definieren, und nun in ein anderes Bezugssystem transformieren.

$$T_{I\,\alpha}^{\ \ \beta} = \frac{\partial V_I^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} V^\nu \right)$$

$$\overset{\text{wie oben}}{=} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \cdot V^\nu$$

Damit sich $T_{I\,\alpha}^{\ \ \beta}$ aber explizit wie ein Tensor transformiert suchen wir eine Darstellung der Form

$$T_{I\,\alpha}^{\ \ \beta} \overset{!}{=} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} T^\nu_{\ \mu}$$

Schreiben wir den "problematischen" Term mit Hilfe der Kettenregel um $(\nu \to \lambda)$

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} V^\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \delta^\beta_\gamma \frac{\partial^2 \xi^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} V^\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\gamma} \frac{\partial^2 \xi^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} V^\lambda$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$$

Damit

$$T_I{}^\beta{}_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \right) \hat{=} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} T^\nu_\mu \,,$$

wobei wir nun definiert haben

$$T^\nu_\mu = \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \equiv V^\nu_{\|\mu}$$ als die kovariante Ableitung des Vektors V^λ

$$\hat{=} \widetilde{V^\nu_{|\mu}}$$

i.e. $$\boxed{T^\nu_\mu = V^\nu_{|\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda}$$

Daß $V^\nu_{\|\mu}$ ein Tensor ist, ergibt sich unmittelbar aus dem allgemeinen Kovarianzprinzip. Im lokalen Inertialsystem (≙ geodätisches System) ist $\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = 0$, d.h. $V_I{}^\nu{}_{\|\mu} = V_I{}^\nu{}_{|\mu}$ und das obige allgemeingültige Transformationsgesetz gilt auch für diese Ableitung für beliebige Koordinatensysteme.

explizites Check:

Es ist (Seite 6)

$$\bar\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = \frac{\partial \bar x^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar x^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar x^\lambda} \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} - \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar x^\lambda} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar x^\mu} \frac{\partial^2 \bar x^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \bar\Gamma^\nu_{\mu\lambda} \bar V^\lambda = \bar\Gamma^\nu_{\mu\lambda} \frac{\partial \bar x^\lambda}{\partial x^\sigma} V^\sigma = \frac{\partial \bar x^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar x^\mu} \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} V^\gamma - \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar x^\mu} \frac{\partial^2 \bar x^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} V^\beta$$

letzte Seite: $$\bar V^\nu_{|\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar x^\mu} \frac{\partial \bar x^\nu}{\partial x^\beta} V^\beta_{|\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar x^\mu} \frac{\partial^2 \bar x^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta$$ hebt sich auf

$$\Rightarrow \quad \bar V^\nu_{\|\mu} = \bar V^\nu_{|\mu} + \bar\Gamma^\nu_{\mu\lambda} \bar V^\lambda = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar x^\mu} \frac{\partial \bar x^\nu}{\partial x^\beta} \left(V^\beta_{|\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} V^\gamma \right)$$

$$\hat{=} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar x^\mu} \frac{\partial \bar x^\nu}{\partial x^\beta} V^\beta_{\|\alpha}$$

q.e.d.

Bemerkung: 1.) Eine "strengere" Einführung entnehme man den Lehrbüchern; unsere war physikalisch motiviert

2.) Bei uns ist $\Gamma^i_{mj} = \Gamma^i_{jm}$

Dies folgt auch aus (*) unter der Annahme, daß es ein Bezugssystem gibt, wo Γ^i_{mj} lokal verschwindet, i.e. unser Postulat.

Theorem (Adler, Kap. 2): Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines spez. lok. Bezugssystems, wo Γ^i_{mj} verschwindet, ist daß die affinen Übertragungen sym. in den unteren Indizes sind, i.e. ein geodätisches System existiert lokal.

$\Rightarrow$ Konstruktion im Adler angegeben

3.) Es ist hier schon intuitiv klar, daß die Γ's etwas mit der Beibehaltung von gleicher Größe und Richtung eines Vektors an verschiedenen Punkten im Raum zu tun hat, denn im spez. geodätischen System sind zwei Vektoren gleich, wenn ihre Komponenten gleich sind:

$$\underbrace{DV^\nu_I}_{\text{Vektor}} \overset{\text{kovariant}}{=} \underbrace{dV^\nu_I}_{\text{Vektor}} = 0, \text{ dann gilt } \Rightarrow DV^\nu = dV^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\, dx^\mu V^\lambda = 0 = V^\nu_{\|\mu}\, dx^\mu$$

$$\Rightarrow \underbrace{dV^\nu = -\Gamma^\nu_{\mu\lambda}\, dx^\mu V^\lambda}_{\text{Gesetz der Vektorverschiebung}}$$

affine Verbindung

Eine Mannigfaltigkeit, in der ein Gesetz der Vektorverschiebung definiert ist, heißt <u>affiner Raum</u>.

Es macht nun keine Schwierigkeit, die kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors W_ν zu definieren. Dazu denke man, daß $S = V^\nu W_\nu$ ein Skalar ist, und sich das (Diver-) Gradient eines Skalars ja wie ein kovarianter Vektor transformiert:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(S) = S_{|\mu} = \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} W_\nu + V^\nu \frac{\partial W_\nu}{\partial x^\mu}$$

transf. sich wie ein kov. Vektor

$$= \left(V^\nu_{|\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda\right) W_\nu + V^\nu \left(W_{\nu|\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} W_\lambda\right)$$

$$= \underbrace{V^\nu_{||\mu}}_{\text{transformiert sich wie ein kov. Vektor}} W_\nu + V^\nu W_{\nu||\mu}$$

beliebig

$\Rightarrow W_{\nu||\mu}$ transformiert sich wie ein Tensor der Rang 2 mit 2 kov. Indizes

$$\Rightarrow \boxed{W_{\nu||\mu} = W_{\nu|\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} W_\lambda}$$

- unterschiedliches Vorzeichen
- Summation über obere Index

Verallgemeinerung für Tensoren

- Betrachte

Produktregel ↙ Tensor ↙ Tensor $\Rightarrow (\;)_{||\mu} \hat{=}$ Tensor

$$S^\nu{}_\lambda = V^\nu W_\lambda \;,\; (S^\nu{}_\lambda)_{||\mu} = V^\nu_{||\mu} W_\lambda + V^\nu W_{\lambda||\mu}$$

$$= V^\nu_{|\mu} W_\lambda + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} V^\alpha W_\lambda + V^\nu W_{\lambda|\mu} - V^\nu \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} W_\alpha$$

$$= (S^\nu{}_\lambda)_{|\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} S^\alpha{}_\lambda - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} S^\nu{}_\alpha$$

Da wir wissen, daß sich jeder Tensor als Summe von Produkten aus (ko-) und (kontra-) varianten Vektoren schreiben lässt, folgt ganz allgemein für Tensoren höherer Stufe

$$\boxed{\begin{aligned} T^{\nu_1\ldots\nu_n}{}_{\lambda_1\ldots\lambda_l||\mu} &= T^{\nu_1\ldots\nu_n}{}_{\lambda_1\ldots\lambda_l|\mu} + \Gamma^{\nu_1}_{\alpha\mu} T^{\alpha\nu_2\ldots\nu_n}{}_{\lambda_1\ldots\lambda_l} + \ldots \Gamma^{\nu_n}_{\alpha\mu} T^{\nu_1\ldots\alpha}{}_{\lambda_1\ldots\lambda_l} \\ &\quad - \Gamma^\alpha_{\lambda_1\mu} T^{\nu_1\ldots\nu_n}{}_{\alpha\ldots\lambda_l} - \ldots - \Gamma^\alpha_{\lambda_l\mu} T^{\nu_1\ldots\nu_n}{}_{\lambda_1\ldots\alpha} \end{aligned}}$$

Zum Beweis: Man kontrahiere T mit n kovarianten und l kontravarianten beliebigen Vektoren. Dann hat man ein Skalar. Setzt man explizit $U_{|\mu} = U_{||\mu} + \Gamma U$ + etc. ein, erhält man Vektor $= [\ldots] \ldots$ und kann schließen, daß das ein Tensor sein muß.

Die kovariante Ableitung genügt einer Reihe einfacher Regeln, die sich direkt aus ihrer Definition ergeben.

(1) Sie ist linear, d.h.

$$(\alpha A^{\nu}{}_{\lambda} + \beta B^{\nu}{}_{\lambda})_{\|\mu} = \alpha A^{\nu}{}_{\lambda\|\mu} + \beta B^{\nu}{}_{\lambda\|\mu} \quad , \alpha, \beta \equiv \text{const}$$

(2) Produktregel der Differentiation, i.e.

$$(A^{\nu}{}_{\lambda} B^{\sigma})_{\|\mu} = A^{\nu}{}_{\lambda\|\mu} B^{\sigma} + A^{\nu}{}_{\lambda} B^{\sigma}{}_{\|\mu}$$

(3) Bei einem kontrahierten (verjüngten) Tensor wirkt der Γ-Anteil der kov. Ableitung nur auf die nichtverjüngten Indizes:

$$T^{\nu\lambda}{}_{\lambda\|\mu} = T^{\nu\lambda}{}_{\lambda|\mu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} T^{\alpha\lambda}{}_{\lambda}$$

Die Skalar, heben sich gerade die 2 Γ-Anteile heraus

---

(4) Beachte: In der Regel vertauscht nicht die kovariante Ableitung (i.Ggs. zur gewöhnlichen Ableitung)

$$\xi^{\alpha}{}_{\|\mu\|\nu} \neq \xi^{\alpha}{}_{\|\nu\|\mu} \qquad \text{also} \quad \xi^{\alpha}{}_{|\mu|\nu} = \xi^{\alpha}{}_{|\nu|\mu}$$

Zusammenhang der affinen Übertragung und Metrik

Wir wissen bereits aus unseren intuitiven Überlegungen aus Teil 2, daß die affinen Übertragungen in Riemannschen Räumen mit der Metrik über Raumsinvarianz verknüpft sind. Es ist aber lohnenswert, sich diese Beziehung an dieser Stelle noch einmal klarzumachen:

Im lokalen Inertialsystem verschwinden die Γ's in einer hinreichend kleinen Umgebung um einen Punkt P.
Definieren wir nun zwei beliebige, aber konstante Vektoren u^i_I, v^i_I in diesem lok. Inertialsystem in dieser Umgebung. Aufgrund der Konstanz ist der skalare Größe

lokal verschwindet eine Ableitung

$$S(\text{Skalargröße}) = \eta_{\mu\nu}\, u^\mu_I v^\nu_I = u_{I\mu} v^\mu_I$$ ebenfalls konstant in dieser Umgebung.

$$\Rightarrow \quad 0 = S_{|k}(P) \hat{=} S_{||k}(P), \quad (u_I^\mu)_{|k} \hat{=} (u_I^\mu)_{||k} = 0, \quad (v_I^\mu)_{|k} \hat{=} (v_I^\mu)_{||k} = 0$$

Diese Ableitung muß dann aber auch in beliebigen Koordinaten am Punkt P verschwinden!

$$0 = \left(g_{\mu\nu}\, u^\mu v^\nu\right)_{||k} \quad \leftarrow \text{im Punkt P}$$

$$= (g_{\mu\nu|k})\, u^\mu v^\nu + g_{\mu\nu}\,(u^\mu_{||k})\, v^\nu + g_{\mu\nu}\, u^\mu\, (v^\nu_{||k})$$

$$= (g_{\mu\nu|k})\, u^\mu v^\nu + g_{\mu\nu}\,(\underbrace{u^\mu_{||k}}_{\substack{=0 \\ \text{da auch } 0 \text{ im Inertialsyst.}}} - \Gamma^\mu_{k\lambda} u^\lambda)\, v^\nu + g_{\mu\nu}\, u^\mu\,(\underbrace{v^\nu_{||k}}_{=0} - \Gamma^\nu_{k\lambda} v^\lambda)$$

$$= \left(g_{\mu\nu|k} - g_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{k\mu} - g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{k\nu}\right) u^\mu v^\nu = 0$$

Da u^μ, v^μ beliebig, muß die Klammer verschwinden.

$$g_{\mu\nu|k} - g_{\lambda\nu}\underbrace{\Gamma^\lambda_{k\mu}}_{\text{sym}} - g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{k\nu} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1)\quad g_{\mu\nu|k} - g_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{\mu k} - g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{k\nu} = 0 \qquad (*)$$

+ zykl. Vertauschung

$$(2)\quad g_{\nu k|\mu} - g_{\lambda k}\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - g_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu k} = 0$$

$$(3)\quad g_{k\mu|\nu} - g_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{k\nu} - g_{k\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 0$$

Bilden wir (2) + (3) − (1)

auch einander gleich

$$g_{\nu\kappa|\mu} + g_{\kappa\mu|\nu} - g_{\mu\nu|\kappa} - g_{\lambda\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \cancel{g_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}} - \cancel{g_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu}} - g_{\kappa\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$$
$$+ \cancel{g_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}} + \cancel{g_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(g_{\nu\kappa|\mu} + g_{\kappa\mu|\nu} - g_{\mu\nu|\kappa}\right) - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\, g_{\lambda\kappa} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \underbrace{\left(g_{\nu\kappa|\mu} + g_{\kappa\mu|\nu} - g_{\mu\nu|\kappa}\right)}_{\hat{=}\,[\mu\nu,\kappa]}}$$, das schon bekannte Resultat.

$\hat{=}\,[\mu\nu,\kappa]$ – Christoffel-Symbol 1-ter Art

Christoffel-Symbol 2-ter Art.

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist ferner:
Die kovariante Ableitung des metrischen Tensors verschwindet. Einen sofortigen Beweis können wir mithilfe des allgemeinen Kovarianzprinzips führen, denn im lok. Ruhesystem ist $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ und $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$, so daß auch gemäß (*) $\eta_{\mu\nu|\kappa} \equiv \eta_{\mu\nu||\kappa} = 0$ für alle $\mu\nu\kappa$.
Aus (*) wird aber auch offensichtlich, daß in beliebigen Koordinaten

$$0 = g_{\mu\nu|\kappa} - g_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu} \equiv g_{\mu\nu||\kappa} \,.$$ — <u>Ricci-Theorem</u>

Entsprechend ähnlich folgt

$$g^{\mu\nu}{}_{||\kappa} = 0 \;;\; \delta_{\mu}{}^{\nu}{}_{||\kappa} = 0 \,.$$

Diese Beziehungen haben zur Folge, daß das <u>Heben</u> und <u>Senken</u> von Tensorindizes mit der kovarianten Ableitung vertauscht, z.B. $V^{\mu}{}_{||\lambda} = (g^{\mu\nu}V_{\nu})_{||\lambda} = g^{\mu\nu}V_{\nu||\lambda}$!

Die Bedeutung der kovarianten Ableitung liegt im Folgenden:
Sie erzeugt wieder Tensoren, und sie geht in die gewöhnliche partielle Ableitung im lokalen Inertialsystem über?
Daraus ergibt sich eine einfache, aber allgemeine Vorschrift, wie sich der Einfluß der Gravitation auf physikalische Systeme oder Bewegungsgleichungen beschreiben läßt: In den speziell-relativistische Bewegungsgleichungen ersetzt man die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ durch $g_{\mu\nu}$ und jede Ableitung durch die entsprechende kovariante Ableitung. Die Gleichung ist dann, wenn sie eine lokale Bewegungsgleichung war, allgemein kovariant. Nach dem Prinzip der allgemeinen Kovarianz ist sie dann in beliebigen Gravitationsfeldern gültig?

(kurzes weitreichendes Beispiel:

$T^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad T^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0$

Energie-Impuls-Stromerhaltung

↑ Bewegung der Materie im gekr. Raum)

Parallelverschiebung

Oft ist eine vektorielle Größe nicht in der gesamten vierdim. Raum-Zeit definiert, sondern nur entlang einer Kurve $x^\mu(\tau)$ (Trajektorie eines einzelnen Teilchens), die durch den invarianten Parameter τ, meist die Eigenzeit, parametrisiert wird

$$V^\mu \hat{=} V^\mu(x^\mu(\tau)) \quad \text{etc. andere Größe}$$

part. Ableitung $\xrightarrow{\text{nur Abl. nach Kurvenparameter}}$ $\dfrac{dV^\mu}{d\tau}$

$$\Rightarrow \quad \bar{V}^\mu(\tau) = \left.\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\right|_{x^\mu(\tau)} V^\alpha(\tau)$$

$$\frac{d\bar{V}^\mu}{d\tau} = \left.\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\right|_\tau \frac{dV^\alpha}{d\tau} + \underbrace{\left.\frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right|_\tau}_{\text{nicht tensoriell (vektoriell)}} \frac{dx^\beta}{d\tau} V^\alpha(\tau) \quad \text{– kein Vektor}$$

aber erinnern wir uns an

$$V^\mu_{\ \| \nu} = V^\mu_{\ |\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\lambda \quad \Big| \cdot dx^\nu$$

$$DV^\mu := V^\mu_{\ \|\nu}\, dx^\nu = V^\mu_{\ |\nu} dx^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\, dx^\nu V^\lambda$$

kontrav. Vektor

$$= dV^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\, dx^\nu V^\lambda \quad \Big| \ \frac{1}{d\tau}$$

$$\boxed{\frac{DV^\mu}{D\tau} \hat{=} \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} V^\lambda} \quad \text{ist Vektor?}$$

so definieren wir diese Vorschrift als kovariante Ableitung des Vektors V^μ entlang der Kurve $x^\mu(\tau)$

Entsprechend

$$\boxed{\frac{DW_\alpha}{D\tau} \hat{=} \frac{dW^\alpha}{d\tau} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}(x(\tau)) \frac{dx^\nu}{d\tau} W_\lambda(\tau)}$$

Was bedeutet

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} \overset{!}{=} 0 \qquad ?$$

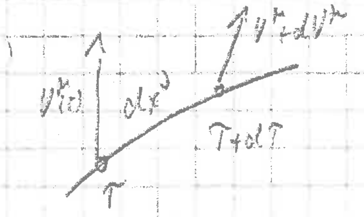
Man sagt, daß der Vektor $V^\mu(\tau)$ entlang der Kurve $x^\mu(\tau)$ parallel verschoben wird.

Es ist

$$\frac{dV^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}V^\lambda(\tau) \quad \text{bzw.} \quad dV^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\, dx^\nu V^\lambda$$

Im mitfallenden Bezugssystem entspricht dies ja gerade $dV^\mu_I = 0$, da die Γ's alle 0 lokal.

Daher ist dies offensichtlich eine sinnvolle Definition für "Parallelität".



$$dV^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\, dx^\nu V^\lambda$$

$$dW_\mu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\, dx^\nu W_\lambda$$

$$\Rightarrow \quad d(V^\mu W_\mu) = dV^\mu W_\mu + V^\mu dW^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\lambda W_\mu dx^\nu + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V^\mu W_\lambda dx^\nu$$

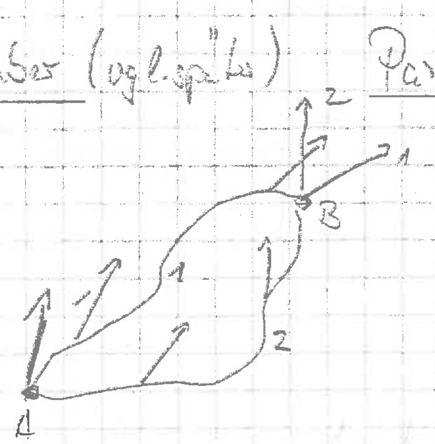
$$= \left(-\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\right) V^\lambda dx^\nu W_\mu = 0$$

$\Rightarrow$ 1.) $|V|^2 = V_\mu V^\mu$ ist dann unter Paralleltransport konstant ! $= \text{const}$

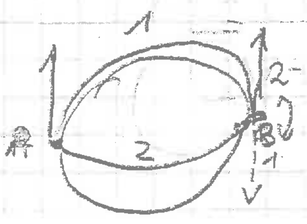
2.) $\cos\theta_{v,w} = \dfrac{V^\mu W_\mu}{|V|\,|W|}$ ist ebenfalls konstant !

macht Parallelverschiebung plausibel !

Beachte aber (vgl. später): "Parallelität" gilt nicht im "Großen"!



"parallel" transportierte Vektoren hängen vom zurückgelegten Weg ab, genau dann wenn der Raum "gekrümmt" (i.e. Krümmungstensor nicht verschwindet)
→ eigentliches Kapitel



welcher ist nun parallel… beide (?)

Zur Vertiefung

geodätische Linie (eines Massepunkts): $\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$

Betrachte Vierergeschwindigkeit $u^\lambda = \dot{x}^\lambda$ am Anfangspunkt P und transportiere die Geschwindigkeit parallel in Richtung der Geschwindigkeit, i.e. $dx^\mu \sim u^\mu$

$$\Rightarrow \quad du^\lambda = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} u^\nu dx^\mu \qquad \Big/ \, \tfrac{1}{d\tau}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du^\lambda}{d\tau} = \ddot{x}^\lambda = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} u^\nu \dot{x}^\mu = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

Die geodätische Linie ist also diejenige Kurve, entlang derer der Geschwindigkeitsvektor einfach parallel verschoben wird, i.e. $\frac{Du^\mu}{D\tau} = 0$.

Beim freien Fall ändert sich also der Geschwindigkeitsvektor im kovarianten Sinne nicht (im mitfallenden lokalen Bezugssystem ist sogar $\dot{u}^\lambda = \ddot{x}^\lambda = 0 \Rightarrow u^\mu = \text{const}$, ergo konstant und parallel).

Dies ist dann offenbar die Verallgemeinerung des Newtonschen Kraftgesetzes

$m\ddot{\vec{x}} = 0$ ← keine äußere Kräfte

für einen kräftefreien Massepunkt auf allgemeine Gravitationsfelder!

außer Gravitation

Gradient, Divergenz und Rotation – Tensordichten

Ein spezieller Fall ergibt sich bei Kontraktion der kovarianten Ableitung eines Vektors, was offenbar die allgemein kovariante Verallgemeinerung der Divergenz eines Vektors ist:

$$V^{\mu}{}_{||\mu} \equiv \mathrm{div}(V) = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}_{\mu\nu} V^{\nu}$$

Hierbei taucht das einmal kontrahierte Übertragungssymbol $\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}$ auf, was wir im Folgenden näher untersuchen wollen; es läßt sich sehr vereinfachen. Wir betrachten dazu

$$g_{\mu\lambda||\nu} = \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} g_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} g_{\mu\alpha} = 0 \quad \Big| \cdot g^{\lambda\mu}$$

$$\Rightarrow g^{\lambda\mu} g_{\mu\lambda||\nu} = g^{\lambda\mu} \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \underbrace{g^{\lambda\mu}}_{=g^{\mu\lambda}} g_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} g^{\lambda\mu} g_{\mu\alpha} =$$

$$= g^{\lambda\mu} \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \delta^{\mu}_{\alpha}}_{\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}} - \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} \delta^{\lambda}_{\alpha}}_{\Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha} = \Gamma^{\mu}_{\mu\alpha}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}}$$

Die rechte Seite läßt sich aber noch weiter vereinfachen. Wir wissen ja, daß $g^{\mu\lambda}$ die inverse Matrix zu $g_{\mu\lambda}$ bezeichnet. Mathematisch bedeutet dies, daß

$$g^{\mu\lambda} = \frac{\Delta^{\mu\lambda}}{g}$$

, wobei $g = \det(g_{\alpha\beta})$ und $\Delta^{\mu\lambda}$ die zu dem Matrixelement $g_{\mu\lambda}$ korrespondierende Unterdeterminante bezeichnet: $g = \sum_{\lambda} g_{\mu\lambda} \Delta^{\mu\lambda}$

z.B. $g = g_{3j} \Delta^{3j}$, wobei Δ^{3j} die Determinante ist, die sich durch Streichen der 3-ten Zeile und j-ten Spalte ergibt. Summe λ ?

Das heißt aber auch rein mathematisch, daß offensichtlich g linear in ein spezielles Element $g_{\mu\lambda}$ ist,

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\lambda}} = \Delta^{\mu\lambda}$$

$$\Rightarrow g^{\mu\lambda} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\lambda}}$$

und weiter

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\lambda}} \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \ln|g|$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \ln\sqrt{|g|} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^\nu}$$

(in der Regel ist g negativ, z.B. -1 im Falle der Lorentzmetrik)

Schließlich

$$\mathrm{div}(V) = V^\mu{}_{\|\mu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^\mu} V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{|g|}\, V^\mu \right)$$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|}\, V^\mu \right)_{|\mu}} \qquad \text{– Divergenz}$$

Spezialfall: $V^\mu = g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}$ (skalares Feld)

$$\Rightarrow V^\mu{}_{\|\mu} \triangleq \Box \phi = \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right)_{\|\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{|g|}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right) \quad \text{– Laplace-Beltrami-Operator}$$

$\Rightarrow$ $\hat{=}$ Verallgemeinerung des Laplaceoperators auf „krummlinige" Koordinaten!

<u>Beispiel</u>: In 3D, Kugelkoordinaten, $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$

$\Rightarrow g_{11} = 1,\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = r^2 \sin^2\vartheta$; alle anderen $g_{ij} = 0$

$\Rightarrow g^{11} = 1,\ g^{22} = \frac{1}{r^2},\ g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}$; alle anderen $g^{ij} = 0$; $g = r^4 \sin^2\vartheta$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 \sin\vartheta}{1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{r^2 \sin\vartheta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{r^2 \sin\vartheta}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

– bekannt aus der Mechanik, E-Dynamik-Vorlesung

Zusammenfassend:

Gradient: $\phi_{|\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi$

Divergenz: $V^\mu{}_{||\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}\,V^\mu\right)_{|\mu}$

Rotation: $u_{\mu||\nu} - u_{\nu||\mu} = \ldots = u_{\mu|\nu} - u_{\nu|\mu}$ (Christoffel-Symbole fallen heraus)

Laplace: $\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\right)_{||\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\right)_{|\mu}$

Die Bedeutung der Determinante des metrischen Tensors, $\sqrt{|g|}$, die im Ausdruck für die Divergenz eines Vektors auftritt, wird noch klarer, wenn wir das Integral einer Divergenz über ein (endliches) Raum-Zeit gebiet betrachten. Dabei müssen wir uns das Transformationsverhalten des Volumenelementes $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ (pseudoeuklidisch) und des Ausdrucks $\sqrt{|g|}$ andererseits ansehen. Nach der Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale haben wir beim Übergang $x \to \bar{x}$:

$$d^4\bar{x} = \left|\frac{\partial(\bar{x}^0,\ldots,\bar{x}^3)}{\partial(x^0,\ldots,x^3)}\right| d^4x$$

mit der Jacobi-Determinante

$$\frac{\partial(\bar{x}^0,\ldots,\bar{x}^3)}{\partial(x^0,\ldots,x^3)} \equiv \det\left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right) = J$$

Andererseits gilt für die Determinante des metrischen Tensors:

$$\bar{g} = \det(\bar{g}_{\mu\nu}) = \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}g_{\alpha\beta}\right) = \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\right)\det\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\right)\det(g_{\alpha\beta})$$
$$= (J^{-1})^2\cdot g$$

Daraus folgt sofort, daß das Produkt $\sqrt{|g|}\,d^4x$ unter beliebigen Transformationen invariant ist:

$$\sqrt{|\bar{g}|}\,d^4\bar{x} = J^{-1}\cdot J\cdot\sqrt{|g|}\,d^4x = \sqrt{|g|}\,d^4x$$ – invariantes Volumenelement

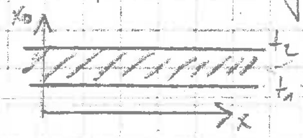
Wir haben damit die Möglichkeit, einen Skalar über ein Raumzeitgebiet zu integrieren, so daß das Ergebnis wieder ein Skalar ist.
Wenn wir dies auf eine Divergenz anwenden, so erhalten wir die Verallgemeinerung des <u>Gaußschen Satzes:</u>

$$\int_V \sqrt{|g|}\, d^4x\, \mathrm{div}(V) = \int_V \sqrt{|g|}\, d^4x\, V^\mu{}_{\|\mu}$$

$$= \int_V d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{|g|}\, V^\mu\right) = \oint dS_\mu \sqrt{|g|}\, V^\mu ,$$

$S_\mu \leftarrow$ begrenzende 3-dim Raum-Zeit-Fläche

wobei dS_μ der Normalenvektor des Oberflächenelements multipliziert mit dessen Größe ist: $dS_\mu = n_\mu dS$.
Das Integral hängt also nur von den Werten des Vektors V^μ an der Oberfläche ab, wie wir es vom Gaußschen Integralsatz im 3dim euklidischen Raum kennen.

<u>Beispiel:</u> $V_4 \hat{=}$ 

, i.e. $t \in [t_1, t_2]$, $\vec{x}$ beliebig

$$\Rightarrow \quad dS^{(2)}_\mu = (1,0,0,0)\, d^3x \,, \quad dS^{(1)}_\mu = (-1,0,0,0)\, d^3x$$

$$\Rightarrow \quad \oint_{dS_\mu} dS_\mu \sqrt{|g|}\, V^\mu \hat{=} \int d^3x \left(V^0(t_2,\vec{x})\sqrt{|g|} - V^0(t_1,\vec{x})\sqrt{|g|} \right)$$

Ist nun z.B. $V^\mu{}_{\|\mu} = 0 \Rightarrow \int d^3x\, V^0(t,\vec{x}) \sqrt{|g(t,\vec{x})|} \hat{=} \mathrm{const}(t)$, i.e. erhalten.

<u>Dichten</u>: Größen wie

$$\left.\begin{array}{ll} \mathcal{S} = \sqrt{|g|}\, S & \text{- skalare Dichte} \\ \mathfrak{V}^\mu = \sqrt{|g|}\, V^\mu & \text{- Vektordichte} \\ \mathfrak{T}_{\mu\nu}{}^\lambda = \sqrt{|g|}\, T_{\mu\nu}{}^\lambda & \text{- Tensordichte} \end{array}\right\} \text{bezeichnet man als Dichten.}$$

Eine wichtige Tensordichte ergibt sich aus dem vollständig antisymm. Symbol

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} := \begin{cases} 0 & \text{wenn 2 Indizes gleich sind} \\ \pm 1 & \text{wenn } (\alpha\beta\gamma\delta) \text{ eine } {\text{gerade} \atop \text{ungerade}} \text{ Permutation von } (0,1,2,3) \text{ sind.} \end{cases}$$

Der zugehörige Tensor vierter Stufe, der Levi-Civita-Tensor, ist wie folgt definiert

$$e^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Wir verzichten auf einen Beweis, daß dieser in der Tat ein Tensor 4-ter Stufe ist, da wir ihn im weiteren nicht benötigen. Auch gilt (ohne Beweis)

$$e^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{\|\lambda} = 0 .$$