

# Abriß der Kosmologie

## Kapitel 9

(Manuskript)

### Die Robertson-Walker-Metrik

Kosmologisches Prinzip: Die Erde hat keinen privilegierten Platz im Weltall; das Weltall bietet (im Mittel) von jeder Stelle aus den gleichen Anblick.

Für Distanzen  $r \gg d \hat{=} \text{Abstand zweier Galaxienhaufen} \sim 3 \times 10^9 \text{ Lichtjahre}$  soll die gravitierende Materie (Masse & Strahlung) in etwa homogen und isotrop verteilt sein.  $r$  sollte aber kleiner als der Radius des Universums ( $\sim 2 \cdot 10^{10}$  Lichtjahre) sein.

Ein solches Punkt existiert, i.e.  $r \sim 10^9$  Lichtjahre.

Als weitere Annahme nehmen wir an, daß die Materieverteilung im Universum die Geometrie der Raum-Zeit bestimmt (Machsches Prinzip).

→ aus der Verteilung in dem spez. Koordinatensystem schließen wir, daß auch die Geometrie des Raumes zu jeder Zeitpunkt homogen sein soll.

Als letzte Annahme postulieren wir die Existenz einer globalen Zeitkoordinate  $x_0 \hat{=} t$ , sodaß das Linienelement die Form

$$ds^2 = dx_0^2 - \underbrace{d\vec{\sigma}^2}_{\sum_{i=1}^3 g_{ik}(x^k) dx^i dx^k}$$

haben soll. Dies ist in einer euklidischen Umgebung eines 3-dim Hyperschnitts immer möglich (Gaußsches Koordinatensystem), wir nehmen also an, es gelte auch für das gesamte Universum.

$\left. \begin{array}{l} \in \text{Gaußsche} \\ - dx_0^2 \hat{=} ds^2 \end{array} \right\}$  es gilt dann  $\Gamma_{00}^i \hat{=} 0$  in diese Koordinate ( $\Leftrightarrow \ddot{x}^i = 0$ )

Aufgrund der Forderung der Isotropie des Raumes liegt als Ansatz

$$ds^2 = dx_0^2 - e^{G(x_0, r)} d\vec{\sigma}^2 \quad (1)$$
$$\hat{=} dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

nahel.

Frage: Wie geht das überhaupt, Masse unendlich groß ?? etc

Das Postulat der Homogenität zu allen Zeiten & orts, daß zwei Beobachter an den Punkten  $x_1^i$  und  $x_2^i$  dieselbe Physik beobachten; nur die absolute Längenskala darf unterschiedlich sein, sich aber nicht mit der Zeit verändern, i. e.

$$\frac{e^{G(x_0, t)}}{e^{G(x_0, t_0)}} = e^{G(x_0, t) - G(x_0, t_0)} \quad \text{muß zeitunabhängig sein.}$$

$$\Rightarrow G(x_0, t) = g(x_0) + f(t)$$

$$\Rightarrow ds^2 = (dx^0)^2 + e^{(g(x_0) + f(t))} dt^2 \quad (2)$$

$\Rightarrow$  für den divergenzfreien Ricci-Tensor  $G^{\mu}_{\nu}$

$$G^0_0 = e^{-G} \left( f'' + \frac{f'^2}{4} + \frac{2f'}{r} \right) - \frac{3}{4} f'^2$$

$$G^1_1 = e^{-G} \left( \frac{1}{4} f'^2 + \frac{1}{r} f' \right) - f'' - \frac{3}{4} f'^2 \quad (3)$$

$$G^2_2 = G^3_3 = e^{-G} \left( \frac{1}{2} f'' + \frac{f'}{2r} \right) - f'' - \frac{3}{4} f'^2$$

in der Darstellung untereinander sind die vertikalen Klammern fallen das sieht so weg.

Eine weitere Einschränkung ergibt sich aus der Erfüllung der Einsteinschen Feldgleichungen (mit kosmologischem Term)

$$G^{\mu}_{\nu} + \Lambda g^{\mu}_{\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu}_{\nu} \quad (4)$$

da wir die räumliche Isotropie und Homogenität ja auch der Materieverteilung im Universum postuliert haben. Das heißt aber, daß  $T^{\mu}_{\nu} \sim \delta^{\mu}_{\nu}$  mit demselben Vorfaktor geteilt muß, das sonst eine räumliche Richtung ausgezeichnet ist.  $\Rightarrow G^1_1 = G^2_2 = G^3_3$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} f'' + \frac{f'}{2r} = \frac{1}{4} f'^2 + \frac{1}{r} f' \quad \text{bzw.} \quad \frac{f''}{f'} - \frac{1}{2} f' - \frac{1}{r} = 0$$

$$\Rightarrow f' = a \cdot r \cdot e^{\pm \frac{1}{2} r} \quad \text{bzw.} \quad e^{-\frac{1}{2} r} f' = a r$$

$$\Rightarrow \boxed{e^t = \frac{1}{b^2} \left( 1 - \frac{a}{4b} r^2 \right)^{-2}} \quad (5)$$

Bezeichnen wir mit

$$\left| \frac{b}{a} \right| \equiv r_0^2$$

$$k \equiv -\operatorname{sgn} \left( \frac{a}{b} \right) = \begin{cases} 0 & \text{für } a=0 \\ \pm 1 & \text{für } |a| \neq 0 \end{cases}$$

und absorbieren bis die Definition des Radialkoordinatens  $r$ , so findet man schließlich die Standardform des sog. Robertson-Walkers-Metriks:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{g(x^0)} \frac{d\vec{x}^2}{\left(1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2}\right)^2}$$

$$G^1_1 = G^2_2 = G^3_3 = a^2 e^{-g(x^0)} = \frac{3}{4} r^2 \quad (6)$$

hängt nur von der Zeit  $x^0$  ab!  
 $\Gamma^i_{00} = 0$ ; i.e. manifest im Nullfeld der Bezugssystem, i.e. lokal in Ruhe?  
 $\Rightarrow$  universelles Inertialsystem, keine (lokale) Materieverteilung.

andere Darstellungsmöglichkeiten:

1) dimensionale Radialkoordinatens  $u = \frac{r}{r_0}$

Schreibweise:  $R(t) = r_0 e^{\frac{1}{2}g(t)}$

$$\Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \frac{du^2 + u^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}{\left(1 + k \frac{u^2}{4}\right)^2} \quad (7)$$

2)  $k=1$

$$\frac{du}{1 + \frac{u^2}{4}} = d\left(2 \arctan \frac{u}{2}\right)$$

$k=-1$

$$\frac{du}{1 - \frac{u^2}{4}} = d\left(2 \operatorname{Arctanh} \frac{u}{2}\right)$$

$$\Rightarrow k = \begin{cases} +1 & : u = 2 \tan \frac{\chi}{2}, \quad \frac{u}{1 + \frac{u^2}{4}} = \sin \chi \\ 0 & : u = \chi \\ -1 & : u = 2 \tanh \frac{\chi}{2}, \quad \frac{u}{1 - \frac{u^2}{4}} = \sinh \chi \end{cases}$$

$$\Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[ dx^2 + S(x)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (8)$$

wobei

$$S(x) = \begin{cases} \sin x & (k=1) \\ x & (k=0) \\ \sinh x & (k=-1) \end{cases}$$

Man erkennt, daß für  $k=1$  das räumliche Inhalt des Linienelements nichts anderes als die Verallgemeinerung des Linienelements auf einer Kugelschale ("Balloon") für eine  $d$ -dim. Kugel darstellt (dies läßt sich auch explizit für ein Linienelement auf einer Hypersphäre zeigen):

$d=2$ : Kreislinie  $dl^2 = R^2 d\theta^2$

$d=3$ : Kugelsphäre  $dl^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$  ist ein Winkel...?

$d=4$ : Hypersphäre  $dl^2 = R^2 (dx^2 + \sin^2 x (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))$

↑ Krümmungsradius der Hypersphäre. ~ geschlossen...

" $k=0$  ist offenbar das Linienelement eines unendlich ausgedehnten Euklidischen Raumes. (vgl. ②)

" $k=-1$  ist keine so anschauliche Dichtung möglich; die Geometrie läßt sich nicht in  $n$  oder  $(n-1)$  euklid. Raum einbetten. Diese Geometrie wurde von Folger und Wobersky als erste nicht euklid. Geometrie konstruiert? (Erinnerung: konstante, positive Krümmung)"

Die Kosmologische Rotverschiebung

Wir wollen im Folgenden skizzieren, daß die Robertson-Walker-Metrik eine Rotverschiebung des von entfernten Quellen stammenden Lichtes vorherseht ("expandierendes Universum").

Quell  $Q$  (Quels)      Beobachter  $B$  (Beobachter)

physikalischer Abstand:  $d = R(t) dl = R(t) \frac{(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2))^{1/2}}{c}$

$\Rightarrow \int_{t_B}^{t_Q} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{r_B}^{r_Q} |dl| = l$  (dimensionslos)      (9)

Zielfunktion  $dt=0$

Um die Frequenzänderung festzustellen, betrachte wir die um eine Schwingungsperiode spätere emittierte Strahlung,  $\Delta t_Q = \frac{1}{\nu_Q}$ . Sie kommt um  $\Delta t_B = \frac{1}{\nu_B}$  später beim Beobachter an.

Da aber der "Abstand"  $l$  invariant ist (als Koordinaten sind ja dieselben) (nicht aber der physikalische Abstand...), muß es gelten

$\int_{t_B}^{t_B+\Delta t_B} \frac{cdt}{R(t)} = l$

$\int_{t_Q}^{t_Q+\Delta t_Q} \frac{cdt}{R(t)} = l$

$\Rightarrow \int_{t_B}^{t_B+\Delta t_B} \frac{cdt}{R(t)} - \int_{t_Q}^{t_Q+\Delta t_Q} \frac{cdt}{R(t)} = 0 = \frac{c}{\nu_B R(t_B)} - \frac{c}{\nu_Q R(t_Q)}$

$\Rightarrow \left| \frac{\nu_B}{\nu_Q} = \frac{R(t_Q)}{R(t_B)} < 1 \right|$ , falls  $R(t_Q) < R(t_B)$ , also, da  $t_B > t_Q$  für ein expandierendes Universum      (10)

Rotverschiebung der Spektrallinien (exp. beobachtet)  
 (Bei Kontraktion hätte wir eine Blauverschiebung = -.)

Man gibt das Ausmaß der Verschiebung üblicherweise als relative Änderung des Wellenlänge (5)

$$z = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_B - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{R_B}{R_0} - 1 \quad (10)$$

Experimentell hat man bei anderen Werten bis jeweils von  $z=2$  gefunden, was  $R_B > 3R_0$  bedeutet.

Dieser Reize kann, daß eine Rotverschiebung kosmologische Ursache hat, so ist dies ein Beweis für die Expansion des Universums. Alternative Erklärung wie (zufällige) Dopplerverschiebung scheidet aus, denn eine <sup>weitere</sup> Blauverschiebung beobachtet wurde. Auch ist eine gravitative Rotverschiebung keine Erklärung ( $\ddot{a} < 3\dot{a}$  gibt es keine stabile Sonne.  $z(z=3R_0) = \left(\frac{g_{00}(t_B)}{g_{00}(t_0)}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 0.225$ )

Wir wollen nun zeigen, daß eine Rotverschiebung  $z$  in erster Näherung linear mit dem (Koordinaten) "Abstand"  $l$  zunimmt:

$$\frac{1}{R(t)} \approx \frac{1}{R_0} - \frac{R_0'}{R_0^2} (t-t_0) - \left( \frac{R_0''}{R_0^3} - \frac{R_0'^2}{2R_0^2} \right) (t-t_0)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow l = \frac{c(t_B - t_0)}{R_0} + \frac{c R_0' (t_B - t_0)^2}{2R_0^2} + \dots$$

$$\Rightarrow z = \frac{R_B}{R_0} - 1 \approx \frac{R_0'}{R_0} (t_B - t_0) + \left( \frac{R_0''}{R_0^3} - \frac{R_0'^2}{2R_0^2} \right) (t_B - t_0)^2$$

$$\Rightarrow \left[ z = \frac{R_0'}{c} l + \left( \frac{R_0''}{R_0^3} - \frac{R_0'^2}{2R_0^2} \right) \frac{l^2}{2c^2} \right] \sim l \quad (12)$$

Wenn wir (12) nach dem ersten Term ableiten, erhalten wir gerade das Hubble'sche Gesetz, da der physikalische Abstand in niedrigster Näherung ja gerade

$$L = R_0 l$$

lautet und damit

$$z \approx \frac{R_0'}{c R_0} L + \dots = \frac{H_0}{c} L \quad (13)$$

← Hubble'sche Konstante

$$H_0^{-1} \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ Jahre} = 6 \cdot 10^{17} \text{ sec}$$

Der physikalische Abstand z.B. zweier Galaxien wächst mit der Zeit, da

$$L = R(t) \cdot l$$

$$\Rightarrow v = \frac{dL}{dt} = \frac{R'(t)}{R(t)} L \Rightarrow z \equiv \frac{v}{c} \quad (\text{Dopplersches Gesetz von einer orientierten Bewegung})$$

Die Robertson-Walker-Metrik erklärt also die systematische Rotverschiebung der Galaxien und verknüpft sie mit der Expansionsgeschwindigkeit des Weltalls. Die Hubble-Zeit  $T = \frac{R_B}{R_B'} = \frac{1}{H_0} \sim 2 \cdot 10^{10} \text{ Jahre}$  ist ein großes Maß für das Alter des Universums.

(Ursprünglich bestimmte Hubble die Konstante  $H_0$  etwa um ein Zehntel 5-10 % groß)

- Problematik der Entfernungsmessungen (wird nicht eingegangen).

$$H_0 = (75 \pm 25) \text{ km / s. Mpc}$$

Man kann auch (13) in 2-ter Näherung entwickeln:

$$z = \frac{1}{c} H_0 \cdot L + \frac{1}{2c^2} H_0^2 (1+q_0) L^2 + \dots \quad (14)$$

wobei

$$q_0 = - \frac{R_B'' R_B}{R_B'^2}$$

die Abweichung von einem linearen Expansionsgesetz angibt (da  $R'' \neq 0$ )

Man bezeichnet  $q_0$  auch als Verzögerungsparameter, denn für  $q_0 > 0$  ( $R'' < 0$ ) nimmt die Expansionsgeschwindigkeit  $R'(t)$  ab, während sie für  $q_0 < 0$  zunehmen würde.

Exp:  $0 \leq q_0 \leq 2$

# Die Friedmann-Gleichungen

$k = \begin{cases} +1, & \text{Weltall geschlossen} \\ 0, -1, & \text{Weltall offen} \end{cases}$   
 durch Beobachtung

$R(t)$  ...  
 ↑ Ableitung → Metrie und Druckverteilung,  $T^{\mu\nu}$

$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & & & \\ & -P & & \\ & & -P & \\ & & & -P \end{pmatrix}$ , heute:  $P = \frac{1}{3} \rho \langle v^2 \rangle \ll \rho c^2 \leftarrow$  materie dominiert

früher:  $P = \frac{1}{3} \rho c^2$  (ultrav. Strahlung, Strahlung dominiert)

1) (17)  
 ⇒  $G_0 + \Lambda = -\frac{3k}{R(t)^2} - \frac{3R'(t)^2}{R(t)^2 c^2} + \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4} T_0 = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho$  (15a)

$G^1_1 + \Lambda = -\frac{k}{R(t)^2} - \frac{R'(t)^2}{R(t)^2 c^2} - \frac{2R''(t)}{R(t)c^2} + \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} P$  (15b)

1) (15b)  
 ⇒  $\frac{k c^2 + R'(t)^2 - R(t) R''(t)}{R(t)^3} = \frac{4\pi G}{c^2} (\rho c^2 + P)$  (16a)

1) (15a)  
 ⇒  $\frac{3R''(t)}{R} - \Lambda c^2 = -\frac{4\pi G}{c^2} (\rho c^2 + 3P)$  - Friedmann-Gleichungen (1922) (16b)

Sie bilden die Grundlage für die expandierende Weltmodelle.

Weshalb folgt nach einigen Umformungen der folgende Zusammenhang:

$\frac{d}{dt} (\rho R^3) + \frac{P}{c^2} \frac{d}{dt} (R^3) = 0$  (17)

in Blick auf die Robertson-Walker-Metrik zeigt, daß das Volumenelement des 3-dim Raumes in mitbewegte Koordinatensystem  $u, \theta, \phi$  durch  $dV = R(t)^3 \frac{u^2 \sin \theta}{(1+k\frac{r^2}{4R^2})^3} du d\theta d\phi$  <sup>"koordinates-volumen"</sup>   
 mit gibt dann <sub>ähnelt sich nicht, wie wir ja gesehen haben</sub>

$\frac{d}{dt} (\rho c^2 V) + P \frac{dV}{dt} = \frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = 0 = \frac{1}{T} \frac{dS}{dt}$  <sub>Temperatur, Entropie (dE = -pdV + Tds)</sub>

was impliziert isentrope Expansion (was nicht verwunderlich ist, da ja  $T, p, \rho$  aus der idealen hydrodynamik konstant ist was, die ja selbständig isentrope Bewegung impliziert - keine Reibung etc.)

Beispiele: 1.)  $P(\rho) = \alpha \rho c^2$   
 $\Rightarrow R \sim \rho^{-\frac{1}{3(1+\alpha)}} \quad \text{bzw.} \quad R^{3(1+\alpha)} \rho = \text{const}$

2.) Falls  $\alpha \equiv 0$  oder  $\alpha \neq 0$ , dann  $[R^3 \cdot \rho = \text{const}]$ , also etwa im heutigen Stadium des Universums.

ermitteln: Aus  $P(\rho)$  lässt sich die FG (16) lösen, wenn man als Anfangsbedingungen z.B.  $R(t_B)$  und  $\dot{R}(t_B)$ , also  $R(t_B)$  und  $H_0 = \dot{R}(t_B) = \frac{\dot{R}(t_B)}{R(t_B)}$ , weiß.

Ein durch die FG beschriebenes Weltmodell ist also bestimmt durch

- (a) den geometrischen Parameter  $k = +1, 0, -1$ ;
  - (b) die kosmologische Konstante  $\Lambda$ ;
  - (c) die EOS  $P(\rho)$ ;
  - (d)  $R(t_B), H_0(t_B)$
- } gewisse Vielfalt...

Friedmannsche Weltmodelle

$\Lambda \equiv 0, P \equiv \alpha \rho \Rightarrow R^{3(1+\alpha)} \rho = \text{const} = \rho_0 R_0^{3(1+\alpha)}$   
heutige Dichte  
heutiges "Radii"

(15c)  $\Rightarrow R'^2 + kc^2 \left( -\frac{1}{3} \Lambda c^2 R^2 \right) = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 R_0^{3(1+\alpha)} R^{-(1+3\alpha)}$  (17)

Betrachten wir im weiteren Fall  $\Lambda \equiv 0$  und die heutige Situation, wo der Druck  $P(\rho)$  vernachlässigbar klein ist ( $\alpha \approx 0$ ), so folgt

$R'^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 R_0^3 \frac{1}{R}$  (18)

Das Aussehen

$D_0 \equiv \frac{2G}{c^2} \frac{4\pi}{3} \rho_0 R_0^3 \equiv \frac{2GM_0}{c^2}$

steht so etwas wie dem "Schwarzschildradius" des Universums da, wobei aber zu beachten ist, dass  $M_0$  nicht die reale Masse des Universums darstellt, da der Radius  $R(t)$  nicht den Radius einer Kugel etwa entspricht (für  $k=0, -1$  ist ja das Universum ja nicht unendlich ausgedehnt).

Damit lautet (15)

$R'^2 = \left( \frac{D_0}{R} - k \right) c^2$  radiellen (20)

und entspricht formal der (nichtrel.) Bewegungsgleichung einer Masse  $m$  im Schwerfeld eines Himmelskörpers der Masse  $M_0$ , d.h.  $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = E = \text{const} \hat{=} -mkc^2$



Drei Fälle sind zu unterscheiden (a)  $E < 0 \Leftrightarrow k = +1$ : die Bahn des "Himmelskörpers" ist geschlossen; (b)  $E > 0 \Leftrightarrow k = -1$ , die Probenmasse kann dem Himmelskörper entweichen; (c)  $E = 0 \Leftrightarrow k = 0$ : das Grenzfall, in dem die Geschwindigkeit schon Grenzwert Null annimmt.

Konkret findet man:

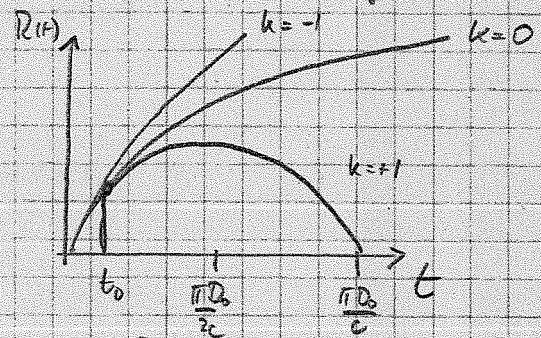
(a)  $k = +1$ ;  $R(t) = D_0 \sin^2 \tau(t) = \frac{D_0}{2} (1 - \cos 2\tau)$  mit  $ct = \frac{D_0}{2} (2\tau - \sin 2\tau)$   
 $R(t)$  verschwindet für  $\tau = 0, \pi$  und  $\tau = \pi$  ( $t = \frac{\pi D_0}{c}$ )  $\rightarrow$  Parametrisierung eines Lykloids  
 Bei  $t = \frac{\pi D_0}{2c}$  erreicht  $R$  sein Maximum  $R = D_0$ . Für  $t \ll \frac{\pi D_0}{2c}$  gilt  $R(t) \sim t^{\frac{2}{3}}$

(b)  $k = -1$ ;  $R(t) = D_0 \sinh^2 \tau(t) = \frac{D_0}{2} (\cosh 2\tau - 1)$  mit  $ct = \frac{D_0}{2} (\sinh 2\tau - 2\tau)$

$t, \tau \rightarrow 0$ :  $R \rightarrow 0$

$t \rightarrow \infty$ :  $R(t) \approx ct$ , d.h. das Krümmungsradius wächst mit Lichtgeschwindigkeit.

(c)  $k = 0$ :  $R(t) = \left(\frac{3}{2} c \sqrt{D_0}\right)^{\frac{2}{3}} (t - t_0)^{\frac{2}{3}}$



Gültigkeitsbereich nicht definiert, bis in den Nullen von  $t_0$ ?

Der Wert (P) von  $k$  unseres Universums läßt sich in Prinzip aufgrund von Beobachtungen entscheiden (falls  $\Lambda = 0$ ), denn aus

(15a) folgt auch sofort mit  $H_0 = \frac{R'}{R}$

$$\text{sonst: } k = \frac{R_0^2}{c^2} \left( \frac{8\pi G}{3} \rho_0 - H_0^2 \right)$$

↑            ↑  
beobachtbar...    beobachtbar...

Da  $k$  nur die Werte 0, +1, -1 annehmen kann, interpretiere was das aussagt? Berechne

$$\rho_0^{\text{krit}} = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \quad H_0 = 75 \pm 25 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}} \approx (1.1 \pm 0.4) \cdot 10^{-29} \text{ g/cm}^3 \quad (21)$$

die sog. krit. Dichte zur heutigen Zeit ( $\rho^{\text{krit}} \sim H^2 \sim H^2(t)$ ), so könnte die Welt sein, da  $\beta$  falls

- $\rho(t_{\text{heut}}) > \rho_0^{\text{krit}} \Rightarrow k = +1$ , Universum geschlossen
- "  $= \rho_0^{\text{krit}} \Rightarrow k = 0$ ; " asymptotisch flach
- "  $< \rho_0^{\text{krit}} \Rightarrow k = -1$ , Univ. offen.

Die Leute beobachten, daß heißt sichtbare Materie, liefert eine Wert von

$$\rho_0^{\text{Mm}} \sim 3 \cdot 10^{-31} \text{ g/cm}^3 \quad (\Rightarrow \text{Univ. off. ?})$$

also etwa eine gute Größenordnung zu klein.  
 (Dark matter,  $\rho = \rho_{\text{krit}} \dots$ )

Das das Fall oben auch für fast alle Zustandsgleichungen sehr ähnlich ist, liegt nahe. In der Tat findet man so für die Fall eines rel. Zustandsgleichung (Photonengas, ultrak. Heliumgas, etc...)

$$P(\rho) = \frac{1}{3} \rho c^2 \text{ bzw. (18)}$$

$$D^2 + kc^2 = \frac{D_0 \rho_0 c^2}{R^2}$$

mit einer ganz analogen, intuitiven Interpretation des Energiesatzes mit einem eff. Potential  $\sim \frac{1}{R^2}$ .

Man findet die kompakte Lösung

$$R(t) = \sqrt{ct(2\sqrt{D_0 \rho_0} - kct)} \sim t^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

die wieder genau analoge (aber etwas modifizierte) Situation entspricht.

Die "Realität" der Zustandsgleichung irgendwo zwischen  $P = \frac{1}{3} \rho c^2$  und  $P=0$  liegt, ist die Situation semiradiell- u. gl. Standardmodell des Universums...

Lösungen der Friedmann-Gleichungen für  $\Lambda=0$  beginnen immer mit einer Singularität, bei der  $R(t \rightarrow \text{Entstehung}) = 0$  ist (Urknall = Big Bang). Für  $k=+1$  fällt das Universum immer wieder in sich zusammen, während für  $k=0, -1$  die Expansion kein Ende findet.

(Genauer: P. Penrose zeigte 1965 in einer bahnbrechenden Arbeit, daß für  $\Lambda \leq 0$  unter einigen sehr allgem. Annahmen eine kosmologische Anfangssingularität bei Vernachlässigung von Quanteneffekten eine unvermeidliche generische Konsequenz des EG ist.)

$\Lambda \neq 0$ : Stationäre Weltmodelle sind möglich, wie aus (16a) und (16b) folgt

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_0^2}{R_0^2} &= \frac{4\pi G}{c^2} (\rho_0 c^2 + P) > 0 \\ \Delta c^2 &= \frac{4\pi G}{c^2} (\rho_0 c^2 - 3P) > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k=+1, \Delta > 0$$

$\Leftarrow$  Nullpunktsenergie hält "Kollisions" ( $k=+1$ ) Universum gestoppt zusammen.

Also: stat. Universum ist nicht stabil gegenüber kleinen (Dichte-)Fluktuationen, d.h. (Instabilität)

$$\delta R(t) \sim A e^{ct/\Lambda} + B e^{-ct/\Lambda}$$

Solche exponentiell anwachsende Lösungen bezeichnet man als die Sitter-Lösungen.

Sie spielen eine grundlegende Rolle in inflationärer Kosmologie, in der eine exponentielle Phase benötigt wird, um die Flachheit aufzubereiten, so daß das gesamte Universum in konsistentem  $\Lambda \neq 0$  wird dann explizit aus QFT (skalare Theorie, Higgs-Model etc.) bestimmt.

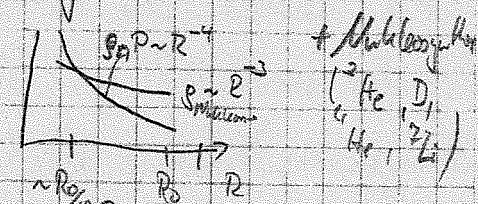
# Das Standardmodell des Universums

Ziel: Beschreibe verschiedene Epochen der Expansion (quasi statisch) mittels relevanten, thermodynamischen Physik der jeweiligen Prozesse (Elementarteilchenphysik, Nucleosynthese, Elementbildung)

Die beobachtete 3K-Hintergrundstrahlung ist das Überbleibsel aus einer frühen Phase des Kosmos (und vollständig isotrop!)  $\Rightarrow \frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-4}$

(a)  $t \sim 10^{10}$  Jahre; Universum ist materiedominant, d.h.  $\rho c^2 \gg P$ ,  $\rho$  im wesentlichen Nucleonen.  
 $\rho c^2 \sim R^{-3}(t)$ ;  $P \sim T^4$ ,  $T(t) \sim \frac{1}{R}$ ,  $T_0 \approx 2.7$  K

(b)  $t \sim 10^6$  Jahre; das Universum war etwa 1000 mal kleiner als heute, Energie der Photonen und Nucleonen war etwa gleich groß  $\xrightarrow{\text{Übergang}}$  zu Strahlendominanz  
 "Überhalb" von  $T = 4000$  K was das Wasserstoffgas im Universum weitgehend ionisiert und das Kosmosgas  $H^+$ ,  $e^-$ ,  $\gamma$ -Plasma im thermischen Gleichgewicht



(c)  $t \approx 180$  s;  $T \sim 10^8$  K ( $kT \sim 10^5$  eV), Heliumkerne disoziierten  
 Protonen und Neutronen werden frei

(d)  $t \approx 4$  s;  $T \approx 5 \cdot 10^9$  K,  $\gamma \leftrightarrow e^+e^-$ ,  $p, n, e^+, e^-, \gamma$  und  $\nu$  im therm. Gleichgewicht  
 (freier Quark)

(e)  $t \approx 0.01$  s;  $T > 10^{10}$  K,  $kT \sim 10$  MeV,  $n = p = n$ , schwache Wechselwirkung  
 (später:  $n_p = n_n = 1$ )

(f)  $T > 10^{12}$  K,  $\mu$ -Paare, Pionen

(h)  $T > 2 \cdot 10^{12}$  K; QGP

(...) Diverser elektroschwache Theorie, Symmetrie Restoren, Stringtheorie, Quantengravitation  $\rightarrow$  Nichterhaltung der Baryonenzahl

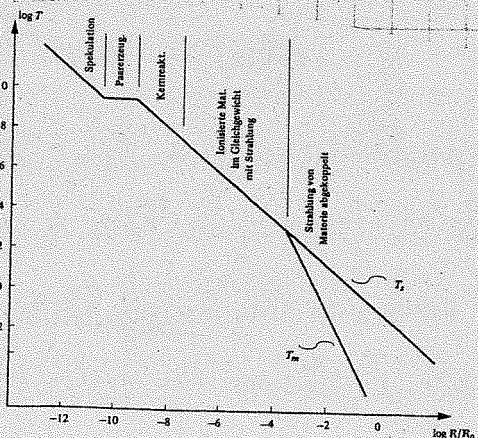


Fig. 23: Thermische Geschichte des Universums

# Probleme des Standardmodells

## 1.) Ereignishorizont - horizon problem

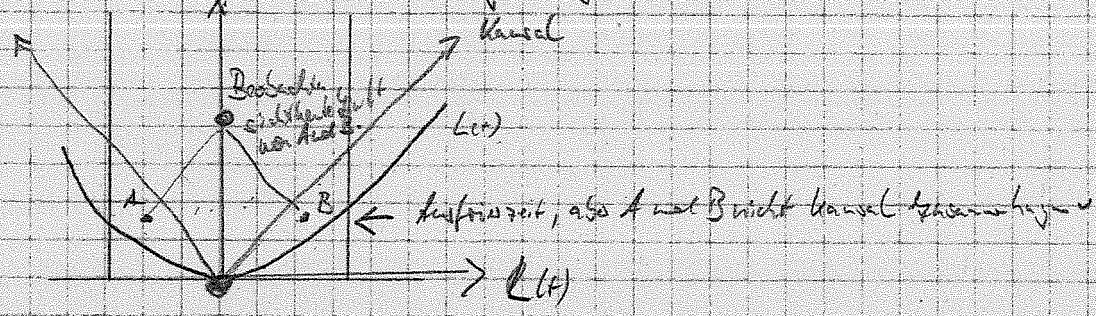
⚡ Punkte können nicht kausal verknüpft sein.

Nach (5) kann es möglich sein, daß es "Abstände"  $l$  gibt, die nicht (9) genügen, i.e.

$l > \int_{t_0}^{t_1} \frac{cdt}{R(t)} \cong l_{max}$ . Dies liegt anschaulich daran, daß sich  $R(t)$  schneller als mit Lichtgeschwindigkeit expandieren kann, i.e.  $\dot{R}(t) > c$ .

Man findet ja  $R(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$  (Strahlungsdominiert), d.h.  $\dot{R}(t)$  wird für "hinreichend kleine"  $t$   $\sim t^{-\frac{1}{2}}$  (materiedominiert) "sehr groß".

Dies gilt insbesondere für kleine  $t$ . Aber warum ist dann das Universum so homogen & isotrop? Zum Zeitpunkt der Entstehung des Strahlung hatte ein großer Teil des heute sichtbaren Universums noch keine kausale Verbindung, so daß es unvorstellbar ist, wie so die anschauen Teile des Universums stammende Strahlung das gleiche Spektrum aufweist.



## 2.) Kritische Dichte - flatness problem

$\rho_{krit} = \frac{3}{8\pi G} H(t)^2 \iff \rho(t) \Rightarrow \Omega(t) \cong \frac{\rho}{\rho_{krit}}$ ,  $\Omega(t_{heute}) \approx 0.05 - 0.1$  (siehe oben)

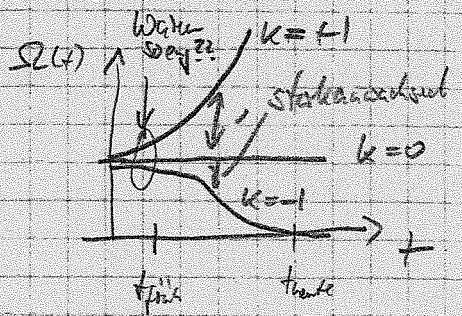
aber: Aufgrund der Entropieerhaltung und der Entwicklung der Dichte und  $R(t)$  findet man

$|\Omega - 1| \lesssim 4 \cdot 10^{-51} \frac{1}{T^2} \frac{1}{(M_{pl})^2} \sim \frac{1}{T^2}$

Selbst früh aus also  $\Omega \rightarrow 1$ , i.e.  $\rho \approx \rho_{krit}$ .

$\Rightarrow$  "fine tuning" des Parameters, warum...

$\Rightarrow$  Warum ist  $\Omega$  nicht dann genau 1. (Wovon aber dann die Rest-Materie... ??)



### 3.) Netto baryon dichte

(3)

heute:  $10^{-9} \lesssim n_B/n_\gamma \lesssim 10^{-10}$

früher:  $n_B \approx n_{\bar{B}} \approx n_\gamma$ , also eigentlich doch  $n_B = n_{\bar{B}}$

"mögliche" Erklärung: QFT & semiklassische Gravitation  
inflationäres Universum (Guth, Linde)

↳ exponentielle Epoche

löst Problem 1.) und 2.), also  $\Omega(\text{heute}) = 1$