Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2015**

Übungen zur Kosmologie – Blatt 1

Aufgabe 1: Allgemeine Metrik für radialsymmetrische Raum-Zeiten

Wir bezeichnen eine Raum-Zeit als radialsymmetrisch, wenn es solche (lokalen) Koordinaten $q^0 = t$, $(q^1, q^2, q^3) = \vec{x} = r(\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta)$ gibt, daß für einen bzgl. dieser Koordinaten ruhenden Beobachter der Raum isotrop erscheint. Dies impliziert die allgemeine Form für das Weltlinienelement

$$\mathrm{d}s^2 = C_1(r,t)\mathrm{d}t^2 - D_1(r,t)\mathrm{d}r^2 - 2E_1(r,t)\mathrm{d}r\mathrm{d}t - F_1(r,t)r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{1}$$

Diese Metrik behält offensichtlich ihre Form unter Umdefinitionen der Koordinaten t und r gemäß

$$t' = T(r,t), \quad r' = R(r,t) \Leftrightarrow t = \tilde{T}(r',t'), \quad r = \tilde{R}(r',t'). \tag{2}$$

Im folgenden wollen wir uns diese Freiheit zunutze machen, um verschiedene Vereinfachungen der Metrik zu betrachten.

(a) (Standardform). Die Standardform ist zunächst dadurch definiert, daß in den neuen Koordinaten (t', r') die Funktion $F'(r', t') = 1$ ist. Zeigen Sie, daß sich dies stets durch die Wahl

$$T(r,t) = t, \quad R(r,t) = r\sqrt{F_1(r,t)} \tag{3}$$

erreichen läßt.

Nunmehr nimmt also die Metrik die Form

$$\mathrm{d}s^2 = C_2(r',t)\mathrm{d}t^2 - D_2(r',t)\mathrm{d}r'^2 - 2E_2(r',t)\mathrm{d}r'\mathrm{d}t - r'^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{4}$$

an.

Argumentieren Sie nun, daß es stets einen integrierenden Faktor η gibt, so daß man eine neue Zeitkoordinate einführen kann, für die

$$\mathrm{d}t' = \eta(r',t)[C_2(r',t)\mathrm{d}t - E_2(r',t)\mathrm{d}r'] \tag{5}$$

ein totales Differential ist. Zeigen Sie, daß sich dann die Metrik zu

$$\mathrm{d}s^2 = B(r',t')\mathrm{d}t'^2 - A(r',t')\mathrm{d}r'^2 - r'^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{6}$$

vereinfacht. Im folgenden schreiben wir für diese Form der Metrik wieder (t, r) anstatt (t', r').

(b) (Vakuumlösung und Birkhoffsches Theorem). Wir wollen nun die Vakuumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right), \tag{7}$$

wobei $T_{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor der Materie und $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ dessen kovariante Spur und $R_{\mu\nu}$ der Ricci-Tensor ist.

Wir betrachten also im folgenden den Fall, daß eine radialsymmetrische Materieverteilung vorliegt, die auf ein endliches Raumgebiet begrenzt ist (z.B. einen Stern). Außerhalb der Materieverteilung ist dann $T_{\mu\nu} = 0$ und folglich auch $T = 0$. Die von 0 verschiedenen Komponenten des Ricci-Tensors für die Metrik (6) lauten

$$R_{tt} = -\frac{\dot{A}^2}{4A^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4AB} + \frac{\ddot{A}}{2A} - \frac{B'}{rA} + \frac{A'B'}{4A^2} + \frac{B'^2}{4AB} - \frac{B''}{2A}, \tag{8}$$

$$R_{rr} = \frac{\dot{A}^2}{4AB} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4B^2} - \frac{\ddot{A}}{2B} - \frac{A'}{rA} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{B'^2}{4B^2} + \frac{B''}{2B} \tag{9}$$

$$R_{tr} = R_{rt} = -\frac{\dot{A}}{rA}, \tag{10}$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = -1 + \frac{1}{A} - \frac{rA'}{2A^2} + \frac{rB'}{2AB}, \tag{11}$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta R_{\vartheta\vartheta}. \tag{12}$$

Dabei bedeutet ein Strich die partielle Ableitung ∂_r und ein Punkt ∂_t.

Zeigen Sie damit, daß die Vakuumfeldgleichungen $R_{\mu\nu} = 0$ bis auf eine willkürliche zeitabhängige Funktion, die man durch geeignete Umdefinition der Zeit $t' = f(t)$ eliminieren kann, die statische Schwarzschild-Lösung folgt.

Anleitung: Beginnen Sie mit Gl. (10) um zu zeigen, daß $A(r,t) = A(r)$ ist. Betrachten Sie dann (8) und (9), um zu beweisen, daß notwendig $(AB)' = 0$ ist und drücken Sie mit der entsprechenden allgemeinen Lösung dieser DGL B durch A aus. Stellen Sie schließlich durch Einsetzen in (11) eine DGL für $A(r)$ auf und lösen Sie diese. Eliminieren Sie schließlich durch eine geeignete Umdefinition der Zeitkoordinate die Zeitabhängigkeit der Metrik.

Bemerkung: Daß radialsymmetrische Vakuumlösungen der Einstein-Gleichungen notwendig ein statisches Gravitationsfeld beschreiben, ist in der Literatur als **Birkhoffsches Theorem** bekannt.

(c) (Gaußsche Koordinaten). Zeigen Sie mit ähnlichen Argumenten wie in Teilaufgabe (b), daß man ausgehend von der allgemeinen Form (1) mit der radialsymmetrischen Metrik statt (t,r) auch stets Koordinaten (τ, R) einführen kann, so daß das Weltlinienelement die Form

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - U(R,\tau)\mathrm{d}R^2 - V(R,\tau)(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{13}$$

annimmt.

Anleitung: Setzen Sie in (1) $r = R$ und definieren Sie dann

$$t' = \int \mathrm{d}t \sqrt{C_1(R,t)}, \tag{14}$$

um $g_{00} = 1$ zu erhalten. Nehmen Sie nun an, daß in diesen neuen Koordinaten die Weltlinien $(R,\vartheta,\varphi) = \text{const}$, $t' = \lambda$ Geodäten sind. Zeigen Sie, daß dann notwendig $\dot{E}_2 = 0$ und folglich durch eine Transformation der Form

$$\tau = t' + f(R), \tag{15}$$

E_2 zum Verschwinden gebracht werden kann und daß dabei $g_{\tau\tau} = 1$ bleibt.

Literatur: S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley&Sons (1972)

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`http://fias.uni-frankfurt.de/~hees/cosmo-SS15/`