Elektromagnetische Felder in der ART

Hendrik van Hees

15. Juli 2017

1 Einleitung und Konventionen

In diesem Skript betrachten wir die Elektrodynamik in einer vorgegebenen allgemein-relativistischen Raum-Zeit. Die Motivation besteht vornehmlich darin, daß in vielen Lehrbüchern die Gravitations-Rotverschiebung und die Hubble-Rotverschiebung bzw. die Rotverschiebungs-Entfernungs-Beziehung in der Kosmologie über recht vage Argumente im Rahmen eines naiven Photonenbegriffs hergeleitet werden. Tatsächlich ist eine korrekte Begründung des Photonenbegriffs nur über die Quantenfeldtheorie möglich und relativistische Quantenfeldtheorie ist selbst in der Näherung, daß man eine fest vorgegebene Hintergrundmetrik betrachtet, problematisch. Für Interessierte sei auf den Standardartikel [DeW75] verwiesen.

Allerdings lassen sich die üblichen „naiven Photonenargumente“ auch im Rahmen der klassischen Elektrodynamik begründen, wobei man von der sogenannten **Eikonalnäherung** Gebrauch macht. Wir folgen der Darstellung der klassischen **Elektrodynamik in der gekrümmten Raum-Zeit** in [LL92], passen dabei aber die Konventionen bzgl. diverser Vorzeichen für den Metrik- sowie die diversen Krümmungstensoren der in der Vorlesung benutzten wie folgt an [ABS75, Fli12]:

Die Signatur der **Metrik** ist $(+,-,-,-)$ („Westküstenkonvention“), d.h. in der flachen Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie (Minkowski-Raum-Zeit) ist die Metrik durch $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ gegeben.

Die **Christoffel-Symbole**, die den **affinen Zusammenhang** der Raumzeit definieren, sind entsprechend einer Riemannschen torsionsfreien Mannigfaltigkeit durch

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(g^{\rho\sigma}\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \tag{1}$$

gegeben, wobei die **Einsteinsche Summationskonvention** gilt, d.h. es wird über gleichlautende Indizes summiert. Dabei muß stets einer der Indizes unten (kovarianter Index) und der andere oben (kontravarianter Index) stehen.

Der **Riemannsche Krümmungstensor** ist vermöge der Christoffel-Symbole durch

$$R^{\alpha}{}_{\mu\beta\gamma} = \partial_\gamma \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\gamma} \tag{2}$$

definiert. Dann gilt für jedes Vektorfeld V_μ

$$(\mathrm{D}_\mu \mathrm{D}_\nu - \mathrm{D}_\nu \mathrm{D}_\mu) V_\rho = -R_{\rho\sigma\mu\nu} V^\sigma. \tag{3}$$

Durch Kontraktion ergibt sich daraus der **Ricci-Tensor**

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}. \tag{4}$$

Eine weitere Kontraktion liefert schließlich den **Ricci-Skalar**

$$\mathscr{R} = R^{\mu}{}_{\mu}. \tag{5}$$

Die **Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation** lauten dann

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{\mathscr{R}}{2} g_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{6}$$

wobei $T_{\mu\nu}$ den symmetrischen Energie-Impulstensor der Materie und $\varkappa = 8\pi G$ (wir verwenden natürliche Einheiten für die die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ ist) die Einsteinsche und G die Newtonsche Gravitationskonstante bezeichnen.
Bildet man die Spur von (6), sieht man, daß die Einstein-Gleichungen auch in der Form

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^{\rho}{}_{\rho} g_{\mu\nu} \right) \tag{7}$$

geschrieben werden können.
Schließlich bemerken wir noch, daß die sog. **Bianchi-Identität**

$$\mathrm{D}^{\mu} G_{\mu\nu} = 0 \tag{8}$$

gilt, d.h. unabhängig von den Bewegungsgleichungen für die Materie, die den Energie-Impuls-Tensor bestimmen, muß

$$\mathrm{D}^{\mu} T_{\mu\nu} = 0 \tag{9}$$

gelten. Dabei ist D^{μ} die kovariante Ableitung.
Wir verwenden stets das **Levi-Civita-Symbol** so, daß die Vorzeichenkonventionen

$$\epsilon^{0123} = +1, \quad \epsilon_{0123} = -1 \tag{10}$$

gelten. Ansonsten sind $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ und $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ vollständig antisymmetrisch unter Vertauschung der Indizes. Anders als in kartesischen Koordinaten im Minkowski-Raum bilden diese Symbole keine Tensor-Komponenten. Dies ist vielmehr nur für den **Levi-Civita-Pseudotensor** der Fall, der durch

$$\Delta^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \Delta_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad \text{mit} \quad g = \det(g_{\mu\nu}) \tag{11}$$

definiert ist. Es handelt sich um einen **Pseudo**tensor, weil er sich nur unter orientierungserhaltenden Transformationen der Koordinaten, also falls $\det(\partial q'^{\mu} / \partial q_{\nu}) > 0$ ist wie ein echter Tensor verhält. Andernfalls kommt ein zusätzliches Vorzeichen ins Spiel!

2 Elektrodynamik in vierdimensional kovarianter Form

Die Elektrodynamik erhält man prinzipiell unter der Annahme des Äquivalenzprinzips und des Postulats der minimalen Kopplung durch die Grundregel, daß man ausgehend von der Formulierung der Naturgesetze in der flachen Minkowski-Raum-Zeit ausgehend die partiellen durch kovariante Ableitungen ersetzt. Dabei ist allerdings bei den Gleichungen zweiter Ordnung zu beachten, daß gemäß (3) die kovarianten Ableitungen dann und nur dann miteinander kommutieren, wenn der Raum flach ist, also $R_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv 0$ gilt. In der Elektrodynamik entsteht dieses Problem nicht, wenn wir von den eichinvarianten Gleichungen erster Ordnung für das elektromagnetische Feld ausgehen. Die **inhomogenen Maxwellgleichungen** lauten demnach

$$\mathrm{D}_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \tag{12}$$

wobei wir Heaviside-Lorentz-Einheiten verwenden. Dabei sind $F^{\mu\nu}$ die kontravarianten Komponenten des antisymmetrischen Feldstärke- oder **Faraday-Tensors** und j^ν die elektrische Vierervektorstromdichte bezeichnet. Wir bemerken, daß wegen der Antisymmetrie $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ des Faraday-Tensors diese kovariante Divergenz durch partielle Ableitungen ausgedrückt werden kann, d.h. (12) kann in der Form

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = j^\nu \tag{13}$$

geschrieben werden.

Die homogenen Maxwellgleichungen lauten

$$\mathrm{D}_\mu F_{\rho\sigma} + \mathrm{D}_\rho F_{\sigma\mu} + \mathrm{D}_\sigma F_{\mu\rho} \equiv \partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho}. \tag{14}$$

Dies läßt sich auch mit Hilfe des **dualen Feldstärketensors**

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \sqrt{-g}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \tag{15}$$

schreiben, denn es gilt

$$\mathrm{D}^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{D}^\mu F^{\rho\sigma} = 0. \tag{16}$$

Dabei folgt die erste Gleichung daraus, daß die kovarianten Ableitungen des Metriktensors verschwinden und die zweite, weil die Kontraktion mit dem Levi-Civita-Symbol bis auf einen Faktor 3 die linke Seite von (14) reproduziert.

Aus der zweiten Form von (14) folgt wie in der Elektrodynamik im Minkowski-Raum, daß es ein **Vektorpotential** gibt, d.h. daß

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \mathrm{D}_\mu A_\nu - D_\nu A_\nu, \tag{17}$$

wobei die zweite Form daraus folgt, daß die Terme mit den Christoffelsymbolen in der kovarianten Ableitung

$$\mathrm{D}_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho \tag{18}$$

wegen $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$ verschwinden. Es folgt weiter, daß das Viererpotential nur bis auf den Gradienten eines Skalarfeldes definiert ist, d.h. das **eichtransformierte Viererpotential**

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi = A_\mu + \mathrm{D}_\mu \chi \tag{19}$$

liefert gemäß (17) denselben Faraday-Tensor wie A_μ.

Wie im Minkowski-Raum können wir durch Wahl der (kovariant verallgemeinerten) Lorenz-Eichung

$$\mathrm{D}_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu) \stackrel{!}{=} 0 \tag{20}$$

die Feldgleichungen für A_μ vereinfachen. Da (14) bereits durch (17) identisch erfüllt ist, sind die verbleibenden unabhängigen Feldgleichungen die inhomogenen Maxwellgleichungen (12). Setzen wir darin (17) ein, folgt

$$g^{\alpha\beta} \mathrm{D}_\alpha F_{\beta\nu} = g^{\alpha\beta} \mathrm{D}_\alpha (\mathrm{D}_\beta A_\nu - \mathrm{D}_\nu A_\beta) = j_\nu. \tag{21}$$

Gemäß (3) gilt nun

$$(\mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\nu - \mathrm{D}_\nu \mathrm{D}_\alpha) A_\beta = R_{\beta\rho\alpha\nu} A^\rho. \tag{22}$$

Kontraktion mit $g^{\alpha\beta}$ liefert

$$j_\nu = g^{\alpha\beta} \mathrm{D}_\alpha (\mathrm{D}_\beta A_\nu - \mathrm{D}_\nu A_\beta) \tag{23}$$

$$= \Box A_\nu - g^{\alpha\beta} (\mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\nu - \mathrm{D}_\nu \mathrm{D}_\alpha + \mathrm{D}_\nu \mathrm{D}_\alpha) A_\beta \tag{24}$$

$$\stackrel{(3,4)}{=} \Box A_\nu - \mathrm{D}_\nu \mathrm{D}_\alpha A^\alpha + R_{\nu\gamma} A^\gamma \tag{25}$$

$$\stackrel{(20)}{=} \Box A_\nu + R_{\nu\gamma} A^\gamma. \tag{26}$$

Wir bemerken, daß wir von der Lorenz-Eichbedingung (20) erst im letzten Schritt Gebrauch gemacht haben. In allgemeiner Eichung gilt (25). Wären wir von der in der speziellen Relativitätstheorie in kartesischen Koordinaten gültigen Gleichung

$$\Box A_\nu - \partial_\nu \partial_\alpha A^\alpha = j_\nu \quad \text{(nur in kartesischen Koordinaten im Minkowski-Raum gültig!)} \tag{27}$$

ausgegangen und hätten einfach partielle durch kovariante Ableitungen ersetzt, hätten wir den letzten Term in (25) nicht gefunden. Dies zeigt, daß in der Tat die naive Übersetzungsregel $\partial_\mu \rightarrow \mathrm{D}_\mu$, wenn man von speziell relativistisch formulierten Gleichungen zu allgemein relativistischen übergehen will, für Differentialgleichungen 2. Ordnung zu falschen Schlüssen führen kann. Aus unserer Herleitung wird unmittelbar klar, daß bei Vernachlässigung des letzten Terms in (25) die Eichinvarianz der Elektrodynamik in der ART verloren ginge. Dies weist darauf hin, daß dieser Krümmungsterm physikalisch zwingend in den Maxwell-Gleichungen auftauchen muß.

3 Konform-Invarianz der freien Maxwell-Gleichungen

Wir bemerken, daß die freien Maxwell-Gleichungen, also falls $j_\nu = 0$ ist, invariant unter konformen Transformationen sind, d.h. setzen wir für eine beliebige Funktion $\lambda = \lambda(q^\mu)$ der Koordinaten

$$g_{\mu\nu} = \lambda \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad A_\mu = \tilde{A}_\mu, \tag{28}$$

so folgt zunächst aus (17)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu A_\nu = \partial_\mu \tilde{A}_\mu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu = \tilde{F}_{\mu\nu}. \tag{29}$$

Andererseits ist

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda} \tilde{g}^{\mu\nu}, \tag{30}$$

da $(g^{\mu\nu})$ die inverse Matrix zu $(g_{\mu\nu})$ ist. Damit ist

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{\lambda^2} \tilde{g}^{\nu\sigma} \tilde{F}_{\rho\sigma} = \frac{1}{\lambda^2} \tilde{F}^{\mu\nu}, \tag{31}$$

wobei wir die Tensoroperationen (wie das Indexziehen in der vorigen Gleichung) für die Größen mit Tilde stets mit $\tilde{g}_{\mu\nu}$ bzw. $\tilde{g}^{\mu\nu}$ vornehmen.

Offensichtlich gelten die homogenen Maxwellgleichungen (14) für $\tilde{F}_{\mu\nu}$ genau dann, wenn sie für $F_{\mu\nu}$ gelten, da sie gar nicht von der Metrik abhängen, wenn man sie in der Form mit den kovarianten Ableitung schreibt.
Ebenso folgt aber für $j_\nu = 0$, also für den Fall der **freien** Maxwell-Gleichungen für (13)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = \frac{1}{\lambda^2\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\mu(\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{F}^{\mu\nu}) = 0. \tag{32}$$

Multiplizieren wir mit λ^2, ergibt sich

$$0 = \mathrm{D}_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\mu(\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{F}^{\mu\nu}) = \tilde{\mathrm{D}}_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}. \tag{33}$$

Dabei ist $\tilde{D}_\mu$ die kovariante Ableitung, die mittels $\tilde{g}_{\mu\nu}$ und den entsprechenden Christoffel-Symbolen definiert ist und D_μ die entsprechende kovariante Ableitung bzgl. der Metrik $g_{\mu\nu}$. Es ist klar, daß die nur die *freien* Maxwell-Gleichungen invariant unter diesen konformen Transformationen sind.
Für die Elektrodynamik in den für die Kosmologie wichtigen Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Raum-Zeiten bedeutet dies eine enorme Vereinfachung, denn bei geeigneter Wahl der Koordinaten $(q^\mu) = (\tau, \chi, \vartheta, \varphi)$ läßt sich diese in der Form

$$(g_{\mu\nu}) = \tilde{a}^2(\tau)\mathrm{diag}(1, -1, -S_K^2(\chi), -S_K^2(\chi)\sin^2\vartheta) \tag{34}$$

schreiben[1], d.h. sie ergibt sich durch konforme Transformation aus der statischen Metrik

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -S_K^2(\chi), -S_K^2(\chi)\sin^2\vartheta. \tag{35}$$

Dabei ist

$$S_K(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & \text{für} \quad K = 1, \\ \chi & \text{für} \quad K = 0, \\ \sinh\chi & \text{für} \quad K = -1. \end{cases} \tag{36}$$

Wir können also die freien elektromagnetischen Felder für alle FLRW-Raum-Zeiten unabhängig von der spezifischen Form des Skalenparameters $a(\tau)$ beschreiben. Wegen der Konforminvarianz $F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}$ ist der kovariante Faraday-Tensor also unabhängig von $a(\tau)$. Insbesondere ist (35) für $K = 0$ die **Minkowski-Metrik**, geschrieben in räumlichen Kugelkoordinaten $(\chi, \vartheta, \varphi)$. Alle Lösungen der Elektrodynamik im Minkowski-Raum sind also zugleich Lösungen in jeder flachen FLRW-Raum-Zeit. Insbesondere sind die ebenen Wellen $A_\mu \propto \exp(-\mathrm{i}k_\mu x^\mu)$ mit $k_\mu k^\mu = 0$ Lösungen. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, daß dies approximativ auch für die nichtflachen FLRW-Metriken ($K \in \{-1, +1\}$) der Fall ist.

4 Die Eikonal-Näherung

Exakte Lösungen der freien Maxwell-Gleichungen für $K \neq 0$ sind trotz der umfassenden Symmetrie der Metrik (35) nicht so einfach zu finden wie im Minkowski-Raum, weil die Gleichungen nicht in Wellengleichungen für die einzelnen Komponenten separieren wie im Fall $K = 0$, wo $F_{\mu\nu}$ identisch mit den Lösungen im Minkowskiraum ist (s. vorigen Abschnitt). Eine Verallgemeinerung der Multipol-

[1] Vgl. die entsprechende Aufgabe auf Übungsblatt 4.

Entwicklung auf eine große Klasse von exakten Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen (Schwarzschild-, Kerr-, FLRW-Metrik) findet sich in [CK74].

Um die für die Kosmologie interessante Rotverschiebung der Spektrallinien des von Sternen, Supernovae, Galaxien etc. ausgesandten Lichts aufgrund der Expansion des Universums (**Hubble-Rotverschiebung**) herzuleiten, genügt jedoch bereits die sog. **Eikonalnäherung**. Diese entspricht dem Übergang von der Wellen- zur Strahlenoptik und ist gültig für die Beobachtung des Lichts weit weg von der Quelle, also $L \gg \lambda$, wobei λ die typische Wellenlänge des emittierten Lichts und L typische Abstände, über die sich Größen wie der Brechungsindex eines Mediums merklich ändern, bezeichnen. Für eine ausführliche Erörterung der Eikonalnäherung in der flachen Minkowski-Raum-Zeit s. [Som78, LL92]. In der ART müssen wir noch annehmen, daß $\lambda \ll R$ ist, wobei R den Krümmungsskalar bezeichnet. Dann führen wir den Parameter

$$\epsilon = \frac{\lambda}{\min(L,R)} \ll 1 \tag{37}$$

ein und machen für das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes den Ansatz

$$A^{\mu} = \mathrm{Re}\left\{[a_0^{\mu} + a_1^{\mu}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)]\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\psi}{\epsilon}\right)\right\}. \tag{38}$$

Die parametrische Abhängigkeit der Phase von ϵ folgt dabei daraus, daß die Phase $\propto k = 2\pi/\lambda$ ist. Für die folgende Rechnung lassen wir die Bildung des Realteils der Einfachheit halber weg. Dies ist erlaubt, solange wir nur mit in A_{μ} linearen Ausdrücken und den Ableitungen nach den reellen Koordinaten q^{μ} operieren.

Als erstes verwenden wir die Lorenz-Eichbedingung (20). Setzen wir (38) ein, erhalten wir

$$\mathrm{D}_{\mu}A^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\partial_{\mu}[\sqrt{-g}(a_0^{\mu} + \epsilon a_1^{\mu})] - \frac{\mathrm{i}}{\epsilon}(a_0^{\mu} + \epsilon a_1^{\mu})\partial_{\mu}\psi\right\}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\psi}{\epsilon}\right) = 0. \tag{39}$$

In führender Ordnung $\mathcal{O}(1/\epsilon)$ folgt

$$a_0^{\mu}\partial_{\mu}\psi = 0. \tag{40}$$

Entwickelt man die Phase ψ in einer Umgebung eines beliebigen Raum-Zeitpunktes bis zur linearen Ordnung, erkennt man, daß

$$k_{\mu} = \partial_{\mu}\psi \tag{41}$$

ist. Die Wellenzahl ändert sich also i.a., d.h. die Krümmung der Raumzeit wirkt ähnlich wie ein **Brechungsindex**. Dies ist insbesondere für die Elektrodynamik in Raum-Zeiten der Fall, die konform zu einer statischen Raum-Zeit sind, d.h. für solche Raum-Zeiten, für die $g_{\mu\nu} = \lambda\tilde{g}_{\mu\nu}$ ist, wobei $\tilde{g}_{\mu\nu}$ nicht von der Zeitkoordinate abhängen, und für die (ggf. nach Transformation zu neuen Koordinaten) $g_{0j} = g_{j0} = 0$ für $j \in \{1,2,3\}$ gilt [LL92].

Gehen wir mit dem Ansatz (38) in die Wellengleichung (26) ein, sehen wir, daß die führende Ordnung $\mathcal{O}(1/\epsilon^2)$ aus der zweimaligen partiellen Ableitung des Exponentialfaktors, die im verallgemeinerten d'Alembert-Operator $\Box$ enthalten ist, herrührt. Daraus ergibt sich

$$k_{\mu}k^{\mu} = g^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\psi)(\partial_{\nu}\psi) = 0. \tag{42}$$

Wie zu erwarten, ist der Wellenvektor lichtartig. Es ist klar, daß sowohl in (40) als auch in (42) der Skalenfaktor $\tilde{a}(\tau)$ weggekürzt werden kann, wie wir es von der Konforminvarianz der Maxwell-Gleichungen erwarten, d.h. statt (42) können wir auch

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\psi)(\partial_{\nu}\psi) = 0 \tag{43}$$

schreiben.

Kovariante Ableitung von (42) ergibt wegen der Gültigkeit der Produktregel für kovariante Ableitungen und der Vertauschbarkeit der kovarianten Ableitungen, wenn sie auf ein Skalarfeld wirken, ergibt

$$0 = \mathrm{D}_\mu(k_\nu k^\nu) = 2k^\nu \mathrm{D}_\mu k_\nu = 2k^\nu D_\mu \mathrm{D}_\nu \psi = 2k^\nu \mathrm{D}_\nu \mathrm{D}_\mu \psi = 2k^\nu \mathrm{D}_\nu k_\mu. \tag{44}$$

Nun definieren die Normalen der Hyperflächen konstanter Phase $\psi = \text{const}$ die **Lichtstrahlen**. Deren Tangentialvektor ist k_μ. Parametrisieren wir also den Lichtstrahl mit $q^\mu(\lambda)$, so gilt bei geeigneter Skalierung des Weltparameters λ

$$\dot{q}^\mu = k^\mu. \tag{45}$$

Dabei bezeichnet der Punkt die Ableitung nach λ. Es ergibt sich nun aus (44), daß der Lichtstrahl eine **Nullgeodäte** ist, denn es gilt

$$\frac{\mathrm{D}^2 q^\mu}{\mathrm{D}\lambda^2} = \frac{\mathrm{D}k^\mu}{\mathrm{D}\lambda} = \dot{q}^\nu \mathrm{D}_\nu k^\mu \stackrel{(45)}{=} k^\nu \mathrm{D}_\nu k^\mu \stackrel{(44)}{=} 0. \tag{46}$$

Damit folgt aber, daß das in vielen Lehrbüchern verwendete naive „Photonenbild“ der Lichtausbreitung im Sinne dieser Eikonal-Näherung tatsächlich korrekt ist, d.h. man kann sich die Lichtstrahlen als Trajektorien von sich auf Nullgeodäten in der Raumzeit bewegenden masselosen Teilchen vorstellen.

Nun folgt aber die Geodätengleichung aus dem Hamiltonschen Prinzip mit der Wirkung

$$S[q] = \int \mathrm{d}\lambda\, L = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\lambda\, \tilde{g}_{\mu\nu}\dot{q}^\mu \dot{q}^\nu. \tag{47}$$

Da also die Vierer-Lagrange-Funktion L nicht explizit von λ abhängt, folgt die Erhaltung der Vierer-Hamilton-Funktion:

$$H = \dot{q}^\mu p_\mu - L = L = \text{const} \quad \text{mit} \quad p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}. \tag{48}$$

Erfüllt also eine Lösung der Geodätengleichung die Bedingung $\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu = 0$ für ein $\lambda = \lambda_0$, so ist sie auch für alle λ erfüllt.

Weiter ist $\tilde{g}_{\mu\nu}$ eine statische Metrik, d.h. die Zeitkoordinate τ ist eine zyklische Variable. Folglich ist entlang des Lichtstrahls

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^0} = k_0 =: \tilde{\omega} = \text{const}. \tag{49}$$

Wir interessieren uns nun für die radiale Lichtausbreitung. Es sei also $\psi = \psi(\tau, \chi)$. Mit der Metrik (35) ergibt sich dann die Eikonalgleichung (43) zu

$$(\partial_\tau \psi)^2 - (\partial_\chi \psi)^2 = 0. \tag{50}$$

Wegen (49) und weil $k_0 = k^0 = \omega$ ist, folgt daraus

$$\partial_\chi \psi = -\partial_\tau \chi = -\tilde{\omega}, \tag{51}$$

wobei wir beim Wurzelziehen das negative Vorzeichen gewählt haben, weil wir den Fall betrachten, daß wir uns als „Beobachter“ bei der radialen Koordinaten $\chi = \chi_o$ befinden und die Lichtquelle bei $\chi = 0$ lokalisiert ist. Diese denken wir uns radialsymmetrisch mit der Oberfläche $\chi = \chi_s = \text{const}$,

wobei $\chi_s \ll \chi$ sein muß, damit die Eikonalnäherung gültig ist; d.h. der Lichtstrahl bewegt sich von χ_s radial zum Beobachtungsort χ_o[2].
Damit ist aber (51) sofort integriert

$$\psi(\tau,\chi) = \tilde{\omega}(\tau - \chi). \tag{52}$$

Gewöhnlich betrachten wir uns aber als **fundamentale Beobachter**, also solche Beobachter, die sich mit dem kosmischen Substrat mitbewegen. Diese nehmen jedoch Zeit- und Abstandsmessungen gemäß der FLRW-Metrik in der Form

$$(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -a^2(t), -a^2(t)S_K^2(\chi), -a^2(t)S_k^2 \sin^2\vartheta) \tag{53}$$

vor. Offenbar ist

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}, \quad a(t) = \tilde{a}[\tau(t)]. \tag{54}$$

Damit folgt aber für die Frequenz bzgl. der mitbewegten Koordinaten

$$\omega = \partial_t \psi = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\partial_\tau \psi = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\tilde{\omega} \stackrel{(54)}{=} \frac{\tilde{\omega}}{a(t)}. \tag{55}$$

Es gilt also entlang des radialen Lichtstrahls

$$\omega a = \tilde{\omega} = \mathrm{const.} \tag{56}$$

Ein zur Zeit t_e bei $\chi_s \simeq 0$ emittiertes Lichtsignal trifft nun zur späteren Zeit t_o beim Beobachter bei χ_o ein. Gemäß (57) gilt für die Frequenzen bei der Emission und Beobachtung

$$\omega_e a(t_e) = \omega_o a(t_o) \Rightarrow \frac{\omega_e}{\omega_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} = 1 + z. \tag{57}$$

Da sich unser Universum ausdehnt, ist $\omega_e > \omega_o$, d.h. die beobachteten Spektrallinien sind gegenüber den lokal gemessenen Spektrallinien zu kleineren Frequenzen hin verschoben. Dies ist die **Hubble-Rotverschiebung**, die durch den Rotverschiebungsparameter z in (57) charakterisiert wird. Diese Herleitung zeigt klar, daß es sich nicht um eine **Dopplerverschiebung** handelt. Ein fundamentaler Beobachter befindet sich im betrachteten Referenzsystem gegenüber einer mit dem Substrat bewegten Lichtquelle in Ruhe, d.h. es gilt für die Vierergeschwindigkeiten von Quelle und Beobachter $(u_s^\mu) = (u_o^\mu) = (1,0,0,0)$.
Für einen Beobachter auf der Erde trifft dies nicht zu, weil wir uns gegenüber dem durch die großräumig gemittelte FLRW-Raum-Zeit definierten fundamentalen Bezugssystem bewegen. Dies läßt sich anhand des **Dipolanteils** der Richtungsabhängigkeit der Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung feststellen. Nach den neuesten Messungen des Planck-Satelliten bewegen wir uns mit etwa 370 km/s gegenüber dem fundamentalen Bezugssystem der FLRW-Metrik. Dies ist in der Tat auf den Dopplereffekt zurückzuführen.
Zu der Zeit t_o gelangt man über die Geodätengleichung für radiale Nullgeodäten. Diese Vereinfacht sich wegen des Erhaltungssatzes (48) zu

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2 \mathrm{d}\chi^2 = 0, \tag{58}$$

[2]Wir haben dabei den formalen Entwicklungsparameter der Eikonalnäherung ϵ wieder auf 1 gesetzt.

d.h. es gilt

$$\chi_o - \chi_s \simeq \chi_o = \int_{t_e}^{t_o} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = (\tau_o - \tau_e). \tag{59}$$

Ist $a(t)$ bekannt, kann man daraus bei vorgegebenen t_e den Beobachtungszeitpunkt t_o bestimmen.

Die Frequenzverschiebung für den Fall, daß sich Beobachter und Lichtquelle gegenüber dem fundamental Bezugssystem bewegen, läßt sich leicht angeben. Wir können nämlich offenbar kovariant schreiben $\omega_e = u_e^\mu k_\mu(t_e, \chi_s)$ und $\omega_o = u_o^\mu k_\mu(t_o, \chi_o)$. Dabei ist gemäß (52)

$$k_0 = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\omega}}{a(t)}, \quad k_1 = \partial_\chi \psi = \tilde{\omega}, \quad k_2 = k_3 = 0. \tag{60}$$

Es ergibt sich also für den allgemeinen Fall von bewegter Quelle und bewegtem Beobachter

$$\frac{\omega_e}{\omega_o} = \frac{k_{e\mu} u_e^\mu}{k_{o\mu} u_o^\mu}. \tag{61}$$

Für den ruhenden Beobachter und die ruhende Quelle ist $(u_e^\mu) = (u_o^\mu) = (1, 0, 0, 0)$ und mit (60) ergibt sich wieder (57). Wie man sieht ergibt für den allgemeinen Fall bewegter Quelle und Beobachter ein kompliziertes Zusammenspiel aus Hubble-Gravitationsrotverschiebungs- und Doppler-Effekt.

Einzig für nicht zu weit entfernte Lichtquellen kann man die Hubble-Rotverschiebung für ruhende Beobachter und Quellen approximativ auch als eine Art Doppler-Effekt deuten. Dazu entwickeln wir den Nenner in (57)

$$1 + z = \frac{\omega_e}{\omega_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \simeq \frac{a(t_o)}{a(t_o) - \Delta t \dot{a}(t_o)} \simeq 1 + \Delta t \dot{a}(t_o)/a(t_o) = 1 + H_o \Delta t, \tag{62}$$

wobei $H_o = \dot{a}(t_o)/a(t_o)$ die Hubble-Konstante und $\Delta t = t_o - t_e$ sind. Damit diese Entwicklung gültig ist, muß offenbar $z \simeq H\Delta t \ll 1$ sein. Andererseits ist die Entfernung des Beobachters zur Lichtquelle gemäß der Robertson-Walker-Metrik

$$r(t_o) = a(t_o)\chi_o \Rightarrow v_o = \dot{a}(t_o)\chi_o = H_o a(t_o)\chi_o. \tag{63}$$

Gemäß (59) gilt aber

$$\chi_o = \int_{t_e}^{t_o} \frac{\mathrm{d}t}{a(t_o)} \simeq \frac{t_o - t_e}{a(t_o)} = \frac{\Delta t}{a(t_o)} \tag{64}$$

und folglich wegen (63)

$$v_o \simeq H_o \Delta t. \tag{65}$$

In derselben Ordnung ist aber der Dopplereffekt in der Minkowski-Raumzeit für einen sich von der Lichtquelle radial entfernenden Beobachter

$$1 + z = \frac{\omega_e}{\omega_o} = \sqrt{\frac{1 + v_o}{1 - v_o}} \simeq 1 + v_o, \tag{66}$$

und dies stimmt wegen (65) in der Tat mit der für $z \ll 1$ gültigen Näherung (62) überein.

5 Luminositätsabstand

Eine Möglichkeit, den Abstand weit entfernter Objekte in der Kosmologie zu messen, ist bei bekannter Luminosität der Lichtquellen („Standardkerzen") über die gemessene Energie-Flußdichte am Beobachtungsort möglich. Wichtige Standardkerzen sind die Supernovae vom Typ Ia. Da hinreichend schwere Sterne nach Verbrauch ihres Fusionsmaterials ungefähr bei gleichen Massen (von der Größenordnung der Chandrasekhar-Masse) kollabieren, ist ihre absolute Helligkeit ungefähr gleich. Aus der gemessenen scheinbaren Helligkeit am Beobachtungsort läßt sich also die Entfernung berechnen. Im folgenden leiten wir den Zusammenhang der scheinbaren Helligkeit vom radialen Abstandsparameter χ her.

Dazu benötigen wir zunächst den **Energie-Impuls-Tensor** des freien elektromagnetischen Feldes. Diesen erhalten wir aus dessen Wirkungsfunktional[3]

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4 q\,\sqrt{-g}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{67}$$

durch Variation bzgl. $g_{\mu\nu}$ bei festgehaltenem A_μ. Unter dieser Variation ist zunächst wegen (29) $\delta F_{\mu\nu} = 0$. Weiter benötigen wir δg. Nun ist $g = \det(g_{\mu\nu})$. Da $g^{\mu\nu}$ als Matrix betrachtet die Inverse zur Matrix $g_{\mu\nu}$ ist, gilt

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} = g\,\delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \tag{68}$$

und damit

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,g\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \tag{69}$$

Für $F^{\mu\nu}$ benötigen wir noch die Variation von $g^{\mu\nu}$. Wegen $g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$ ist

$$g_{\mu\nu}\delta g^{\nu\rho} = -\delta g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} \tag{70}$$

und damit wegen der Antisymmetrie von $F_{\mu\nu}$

$$\delta F^{\alpha\beta} = \delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu} = (\delta g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\alpha}\delta g^{\nu\beta})F_{\mu\nu} = 2\delta g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu} = -2F^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\delta g_{\mu\nu}. \tag{71}$$

Nun ist definitionsgemäß der Energie-Impulstensor irgendwelcher Felder über deren Wirkungsfunktional durch

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4 q\,\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{72}$$

gegeben. Setzen wir nun (69) und (70) in die Variation der Wirkung für das elektromagnetische Feld (67) ein, erhalten wir nach einiger Rechnung

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}. \tag{73}$$

In der führenden Ordnung der Eikonal-Näherung (42) erhalten wir in konformen Koordinaten wegen (38) die ebene Welle

$$A_\mu = a_{0\mu}\cos[\tilde{\omega}(\tau - \chi)], \tag{74}$$

[3] Es ist leicht zu zeigen, daß das Hamiltonsche Prinzip mit dieser Wirkung in der Tat die Maxwell-Gleichung (12) für $j^\mu = 0$ liefert.

wobei die Welle wieder radial von einer bei $\chi_s \simeq 0$ gelegenen Quelle auf den Ort des Beobachters bei $\chi_o = \chi$ zuläuft. Wegen $k_\mu a_0^\mu = 0$ wählen wir der Einfachheit halber

$$(a_{0\mu}) = (0, 0, a_0, 0). \tag{75}$$

Dabei können wir im Rahmen dieser führenden Ordnung der Eikonal-Näherung annehmen, daß $a_0 =$ const ist. Setzt man dies in (73) ein, erhält man nach einiger Rechnung (vgl. das Mathematica-Notebook in Anhang A)

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{\epsilon}(\tau, \chi)\tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu \quad \text{mit} \quad \tilde{u}_\mu = (\tilde{k}_\mu / \tilde{\omega}) = (1, -1, 0, 0) \tag{76}$$

mit dem skalaren Feld

$$\tilde{\epsilon}(\tau, \chi) = \frac{a_0^2 \tilde{\omega}^2 \sin^2[\tilde{\omega}(\tau - \chi)]}{\tilde{a}^2(\tau) S_K^2(\chi)}. \tag{77}$$

Direktes Nachrechnen ergibt, daß diese Näherung die lokale Energieerhaltungsgleichung

$$\mathrm{D}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0 \tag{78}$$

erfüllt. Außerdem ist wegen $\tilde{T}^{\mu\nu} \propto k^\mu k^\nu$ die kovariante Spur $g_{\mu\nu}\tilde{T}^{\mu\nu} = 0$ wie es für ein (klassisches) masseloses Eichfeld sein muß. Beobachtbar ist wegen der schnellen Änderung des Faktors $\sin^2[\tilde{\omega}(\tau - \chi)]$ nur die über die Periodendauer $\tau_0 = 2\pi/\tilde{\omega}$ gemittelte Intensität T^{00}. Da sich über eine Periode der Lichtwelle $\tilde{a}(\tau)$ praktisch nicht ändert, müssen wir nur den $\sin^2$-Faktor mitteln:

$$\langle \tilde{\epsilon}(\tau, \chi) \rangle = \frac{a_0^2 \tilde{\omega}^2}{\tilde{a}^2(\tau) S_K^2(\chi)} \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \sin^2[\tilde{\omega}(\tau + \chi)] = \frac{a_0^2 \tilde{\omega}^2}{2\tilde{a}^2(\tau) S_K^2(\chi)}. \tag{79}$$

Da dies ein Skalarfeld ist, gilt $\tilde{\epsilon}(\tau, \chi) = \epsilon(t, \chi)$, und folglich ergibt sich durch mitbewegte Koordinaten $(t, \chi, \vartheta, \varphi)$ ausgedrückt einfach

$$\langle \epsilon(t, \chi) \rangle = \frac{a_0^2 \tilde{\omega}^2}{2a^2(t) S_K^2(\chi)} \tag{80}$$

und

$$(u^\mu) = \left(\frac{\partial q^\mu}{\partial \tilde{q}^\nu} \tilde{u}^\nu \right) = (1/a, 1/a^2, 0, 0) \tag{81}$$

und damit die Energiedichte bzgl. dieser Koordinaten

$$\left\langle T^{00} \right\rangle = \langle \epsilon(t, \chi) \rangle (u^0)^2 = \frac{a_0^2 \tilde{\omega}^2}{2a^4(t) S_K^2(\chi)}. \tag{82}$$

Dies ist wegen $T^{0\mu} T^{0\nu} g_{\mu\nu} = 0$ auch der Betrag des Poynting-Vektors, also der Energiestromdichte. Folglich ist die gesamte Strahlungsleistung am Emissionsort χ_s

$$P_e = \frac{a_0^2 \tilde{\omega}^2}{2a^4(t_e) S_K^2(\chi_s)} 4\pi a^2(t_e) S_K^2(\chi_s) = \frac{4\pi a_0^2 \tilde{\omega}^2}{2a^2(t_e)}. \tag{83}$$

Dabei ist $4\pi a^2(t_e) S_K^2(\chi_s)$ die Oberfläche der Kugel $t = t_e =$ const, $\chi = \chi_s =$ const am Emissionsort. Damit wird $a_0^2 \tilde{\omega}^2 = 2a^2(t_e) P_e / (4\pi)$ und folglich die Energiestromdichte bzw. Energiedichte am Beobachtungsort $\chi_o = \chi$

$$L = \left\langle T^{00} \right\rangle_{t=t_o, \chi} = \frac{P_e a^2(t_e)}{4\pi a^4(t_o) S_K^2(\chi)}. \tag{84}$$

Wegen (57) können wir $a(t_e)$ durch den Rotverschiebungsparameter z ausdrücken

$$L = \frac{P_e}{4\pi(1+z)^2 a^2(t_o) S_K^2(\chi)}. \tag{85}$$

Der **Luminositätsabstand** d_L ist dann dadurch definiert, daß

$$L = \frac{P_e}{4\pi d_L^2}, \tag{86}$$

d.h. als derjenige Abstand des Beobachters von einer Lichtquelle, der sich in einem flachen Minkowski-Raum für die in der FLRW-Raumzeit beobachtete Lichtintensität ergäbe. Der Vergleich mit (85) liefert dann sofort

$$d_L = (1+z) a(t_o) S_K(\chi). \tag{87}$$

Um auch noch $a(t_o)$ durch die Rotverschiebung z ausdrücken zu können, müssen wir ein konkretes kosmologisches Modell, definiert durch den postulierten **Materieinhalt** des Universums, betrachten und die entsprechenden **Friedmann-Gleichungen** lösen. Vgl. dazu das Skript `http://fias.uni-frankfurt.de/~hees/cosmo-SS15/lum-dist-redshift.pdf`.

A Berechnung des elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensors mit Mathematica

Luminositäts-Entfernungsbeziehung im FLRW-Universum

FLRW-Metrik

In[1]:=
```
q = {tau, chi, th, ph};
```

In[2]:=
```
g = atil[tau]^2
    {{1, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0}, {0, 0, -S[chi]^2 , 0}, {0, 0, 0, -S[chi]^2 Sin[th]^2}};
```

In[3]:=
```
MatrixForm[g]
```

Out[3]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \mathrm{atil[tau]}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{atil[tau]}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{atil[tau]}^2\ \mathrm{S[chi]}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{atil[tau]}^2\ \mathrm{S[chi]}^2\ \mathrm{Sin[th]}^2 \end{pmatrix}$$

In[4]:=
```
dq = {dtau, dchi, dth, dph};
```

In[5]:=
```
FullSimplify[dq.g.dq]
```

Out[5]= $-\mathrm{atil[tau]}^2\ (\mathrm{dchi}^2 - \mathrm{dtau}^2 + \mathrm{S[chi]}^2\ (\mathrm{dth}^2 + \mathrm{dph}^2\ \mathrm{Sin[th]}^2))$

Lichtartige Einheitsvektoren in chi-Richtung

In[6]:=
```
ucov = {1, -1, 0, 0}
```

Out[6]= {1, -1, 0, 0}

In[7]:=
```
gcontra = Inverse[g];
```

In[8]:=
```
u = gcontra.ucov
```

Out[8]= $\left\{\frac{1}{\mathrm{atil[tau]}^2}, \frac{1}{\mathrm{atil[tau]}^2}, 0, 0\right\}$

In[9]:=
```
u.g.u
```

Out[9]= 0

Wir lassen und als nächstes die Christoffelsymbole für den Riemannschen affinen Zusammenhang aus der Definition durch Ableitungen der Metrik ausrechnen:

In[10]:=
```
christ =
   Table[Table[Sum[1 / 2 gcontra[[ii]][[mi]] (D[g[[mi]][[ki]], q[[li]]] + D[g[[mi]][[li]], q[[ki]]] -
         D[g[[ki]][[li]], q[[mi]]]), {mi, 1, 4}], {ki, 1, 4}, {li, 1, 4}], {ii, 1, 4}];
```

In[11]:=
```
Do[Print[MatrixForm[christ[[ii]]]], {ii, 1, 4}]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{\text{atil}'[\text{tau}]}{\text{atil}[\text{tau}]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\text{atil}'[\text{tau}]}{\text{atil}[\text{tau}]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\text{S}[\text{chi}]^2\,\text{atil}'[\text{tau}]}{\text{atil}[\text{tau}]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\text{S}[\text{chi}]^2\,\text{Sin}[\text{th}]^2\,\text{atil}'[\text{tau}]}{\text{atil}[\text{tau}]} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\text{atil}'[\text{tau}]}{\text{atil}[\text{tau}]} & 0 & 0 \\ \frac{\text{atil}'[\text{tau}]}{\text{atil}[\text{tau}]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{S}[\text{chi}]\,\text{S}'[\text{chi}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{S}[\text{chi}]\,\text{Sin}[\text{th}]^2\,\text{S}'[\text{chi}] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\text{atil}'[\text{tau}]}{\text{atil}[\text{tau}]} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\text{S}'[\text{chi}]}{\text{S}[\text{chi}]} & 0 \\ \frac{\text{atil}'[\text{tau}]}{\text{atil}[\text{tau}]} & \frac{\text{S}'[\text{chi}]}{\text{S}[\text{chi}]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{Cos}[\text{th}]\,\text{Sin}[\text{th}] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\text{atil}'[\text{tau}]}{\text{atil}[\text{tau}]} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\text{S}'[\text{chi}]}{\text{S}[\text{chi}]} \\ 0 & 0 & 0 & \text{Cot}[\text{th}] \\ \frac{\text{atil}'[\text{tau}]}{\text{atil}[\text{tau}]} & \frac{\text{S}'[\text{chi}]}{\text{S}[\text{chi}]} & \text{Cot}[\text{th}] & 0 \end{pmatrix}$$

Energie - Impulstensor des em. Feldes

In[12]:= **Acov = {0, 0, 0, a0 Cos[omtil (tau - chi)]}**

Out[12]= {0, 0, 0, a0 Cos[omtil (-chi + tau)]}

In[13]:= **Fcov = Table[D[Acov[[nu]], q[[mu]]] - D[Acov[[mu]], q[[nu]]], {mu, 1, 4}, {nu, 1, 4}]**

Out[13]= {{0, 0, 0, -a0 omtil Sin[omtil (-chi + tau)]}, {0, 0, 0, a0 omtil Sin[omtil (-chi + tau)]}, {0, 0, 0, 0}, {a0 omtil Sin[omtil (-chi + tau)], -a0 omtil Sin[omtil (-chi + tau)], 0, 0}}

In[14]:= **Fcontra = gcontra.Fcov.gcontra**

Out[14]=
$$\left\{\left\{0,0,0,\frac{\text{a0 omtil Csc}[\text{th}]^2\,\text{Sin}[\text{omtil}(-\text{chi}+\text{tau})]}{\text{atil}[\text{tau}]^4\,\text{S}[\text{chi}]^2}\right\},\left\{0,0,0,\frac{\text{a0 omtil Csc}[\text{th}]^2\,\text{Sin}[\text{omtil}(-\text{chi}+\text{tau})]}{\text{atil}[\text{tau}]^4\,\text{S}[\text{chi}]^2}\right\},\{0,0,0,0\},\left\{-\frac{\text{a0 omtil Csc}[\text{th}]^2\,\text{Sin}[\text{omtil}(-\text{chi}+\text{tau})]}{\text{atil}[\text{tau}]^4\,\text{S}[\text{chi}]^2},-\frac{\text{a0 omtil Csc}[\text{th}]^2\,\text{Sin}[\text{omtil}(-\text{chi}+\text{tau})]}{\text{atil}[\text{tau}]^4\,\text{S}[\text{chi}]^2},0,0\right\}\right\}$$

In[15]:= **Sum[Fcontra[[al]][[be]] × Fcov[[al]][[be]], {al, 1, 4}, {be, 1, 4}]**

Out[15]= 0

In[16]:=
```
Tcontra = FullSimplify[Fcontra.g.Fcontra +
   1 / 4 Sum[Fcontra[[al]][[be]] × Fcov[[al]][[be]], {al, 1, 4}, {be, 1, 4}] gcontra]
```

Out[16]=
$$\left\{\left\{\frac{\text{a0}^2\ \text{omtil}^2\ \text{Csc[th]}^2\ \text{Sin[omtil (-chi + tau)]}^2}{\text{atil[tau]}^6\ \text{S[chi]}^2}, \frac{\text{a0}^2\ \text{omtil}^2\ \text{Csc[th]}^2\ \text{Sin[omtil (-chi + tau)]}^2}{\text{atil[tau]}^6\ \text{S[chi]}^2}, 0, 0\right\}, \left\{\frac{\text{a0}^2\ \text{omtil}^2\ \text{Csc[th]}^2\ \text{Sin[omtil (-chi + tau)]}^2}{\text{atil[tau]}^6\ \text{S[chi]}^2}, \frac{\text{a0}^2\ \text{omtil}^2\ \text{Csc[th]}^2\ \text{Sin[omtil (-chi + tau)]}^2}{\text{atil[tau]}^6\ \text{S[chi]}^2}, 0, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\right\}$$

In[17]:=
```
u = gcontra.{1, -1, 0, 0}
```

Out[17]=
$$\left\{\frac{1}{\text{atil[tau]}^2}, \frac{1}{\text{atil[tau]}^2}, 0, 0\right\}$$

In[18]:=
```
Table[u[[mu]] × u[[nu]], {mu, 1, 4}, {nu, 1, 4}]
```

Out[18]=
$$\left\{\left\{\frac{1}{\text{atil[tau]}^4}, \frac{1}{\text{atil[tau]}^4}, 0, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\text{atil[tau]}^4}, \frac{1}{\text{atil[tau]}^4}, 0, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\right\}$$

Wir zeigen, daß der Energie - Impulstensor spurfrei ist und die kovariante Gleichung für lokale Energieerhaltung erfüllt :

In[19]:=
```
Sum[(Tcontra.g)[[mu]][[mu]], {mu, 1, 4}]
```

Out[19]= 0

In[20]:=
```
Table[Sum[D[Tcontra[[al]][[ga]], q[[al]]], {al, 1, 4}] +
  Sum[christ[[al]][[al]][[mu]] × Tcontra[[mu]][[ga]] + christ[[ga]][[al]][[mu]] × Tcontra[[al]][[mu]],
   {al, 1, 4}, {mu, 1, 4}], {ga, 1, 4}]
```

Out[20]= {0, 0, 0, 0}

Literatur

[ABS75] R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, *Introduction to general relativity*, 2. Aufl., McGraw-Hill Inc., New York (1975).

[CK74] J. M. Cohen, L. S. Kegeles, *Electromagnetic fields in curved spaces - a constructive procedure*, Phys. Rev. D **10**, 1070 (1974).
`https://doi.org/10.1103/PhysRevD.10.1070`

[DeW75] B. S. DeWitt, *Quantum field theory in curved spacetime*, Phys. Rept. **19**, 295 (1975).
`https://doi.org/10.1016/0370-1573(75)90051-4`

[Fli12] T. Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, 6. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2012).

[LL92] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*, Bd. 2 von *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Akademie Verlag, Berlin (1992).

[Som78] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik IV, Optik*, Verlag Harri Deutsch (1978).