Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2015**

Übungen zur Kosmologie – Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1: Allgemeine Metrik für radialsymmetrische Raum-Zeiten

(a) Mit der auf dem Blatt angegebenen Transformation

$$t' = T(r,t) = t, \quad r' = R(r,t) = r\sqrt{F_1(r,t)}, \quad \vartheta' = \vartheta, \quad \varphi = \varphi' \tag{1}$$

folgt für die Jacobi-Matrix der Transformation

$$\frac{\partial q'}{\partial q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ r\dot{F}_1/(2\sqrt{F_1}) & \sqrt{F_1} + rF_1'/\sqrt{F_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die kovarianten Metrikkomponenten transformieren sich gemäß

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q'^\mu} \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\beta} g_{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Offensichtlich besitzt die demnach hier benötigte zu (2) inverse Matrix dieselbe Blockstruktur wie (2), und damit besitzt die Metrik bzgl. der neuen Koordinaten die gewünschte Gestalt, d.h. das Viererlängenelement ist bzgl. der neuen Koordinaten durch

$$\mathrm{d}s^2 = C_2(r',t)\mathrm{d}t^2 - D_2(r',t)\mathrm{d}r'^2 - 2E_2(r',t)\mathrm{d}r'\mathrm{d}t - r'^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{4}$$

gegeben mit neuen Metrikkomponenten C_2, D_2 und E_2, deren genauer Zusammenhang mit den alten Komponenten für uns unwichtig ist.

Im nächsten Schritt wollen wir das Außerdiagonalelement E_2 der Metrik eliminieren. Dazu definieren wir eine neue Zeitkoordinate t', so daß

$$\mathrm{d}t' = \eta(r',t)[C_2(r',t)\mathrm{d}t - E_2(r',t)\mathrm{d}r'] \tag{5}$$

gilt. Der „integrierende Faktor“ η wird i.a., benötigt, damit $\mathrm{d}t'$ für beliebige C_2 und E_2 ein totales Differential ist, d.h.

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t\frac{\partial t'}{\partial t} + \mathrm{d}r'\frac{\partial t'}{\partial r'}. \tag{6}$$

Dies verlangt, daß

$$\partial_t \partial_{r'} t' = \partial_{r'} \partial_t t' \Rightarrow -\partial_t(\eta E_2) = \partial_{r'}(\eta C_2). \tag{7}$$

Geben wir nun für irgendeinen beliebigen Zeitpunkt t_0 die Funktion $\eta(r',t_0)$ vor, so können wir (7) als Anfangswertaufgabe zur Integration einer Differentialgleichung für η betrachten und daraus einen integrierenden Faktor $\eta(r',t)$ berechnen. Aus (5) folgt dann aber

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t' + E_2\eta\mathrm{d}r'}{\eta C_2}, \tag{8}$$

und dies in (4) eingesetzt liefert schließlich das Viererwegelement in der gewünschten Form

$$\mathrm{d}s^2 = B(r,t)\mathrm{d}t^2 - A(r,t)\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{9}$$

Dabei haben wir wieder t und r anstatt t' und r' geschrieben.

(b) Im Vakuum vereinfachen sich die Einsteinschen Feldgleichungen zu $R_{\mu\nu} = 0$. Auf dem Blatt waren die Komponenten des Ricci-Tensors für die Metrik der Form (9) angegeben:

$$R_{00} = -\frac{\dot{A}^2}{4A^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4AB} + \frac{\ddot{A}}{2A} - \frac{B'}{rA} + \frac{A'B'}{4A^2} + \frac{B'^2}{4AB} - \frac{B''}{2A}, \tag{10}$$

$$R_{11} = \frac{\dot{A}^2}{4AB} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4B^2} - \frac{\ddot{A}}{2B} - \frac{A'}{rA} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{B'^2}{4B^2} + \frac{B''}{2B} \tag{11}$$

$$R_{01} = R_{10} = -\frac{\dot{A}}{rA}, \tag{12}$$

$$R_{22} = -1 + \frac{1}{A} - \frac{rA'}{2A^2} + \frac{rB'}{2AB}, \tag{13}$$

$$R_{33} = \sin^2\vartheta R_{22}. \tag{14}$$

Verwenden wir als erstes (12). Aus $R_{01} = 0$ folgt dann $\dot{A} = 0$ und folglich

$$A(r,t) = A(r). \tag{15}$$

Damit vereinfachen sich auch die Komponenten (10) und (11) erheblich:

$$R_{00} = -\frac{B'}{rA} + \frac{A'B'}{4A^2} + \frac{B'^2}{4AB} - \frac{B''}{2A} \stackrel{!}{=} 0, \tag{16}$$

$$R_{11} = -\frac{A'}{rA} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{B'^2}{4B^2} + \frac{B''}{2B} \stackrel{!}{=} 0. \tag{17}$$

Multiplizieren wir (16) mit A und (17) mit B und addieren die resultierenden Gleichungen, vereinfacht sich diese zu

$$-\frac{1}{r}\left(B' + \frac{A'B}{A}\right) = 0. \tag{18}$$

Multiplizieren wir dies wiederum mit rA und wenden die Produktregel an, ergibt sich

$$(AB)' = 0 \Rightarrow AB = c_1(t) \Rightarrow B(r,t) = \frac{c_1(t)}{A(r)}, \tag{19}$$

wobei c_1 eine beliebige Funktion der Zeit ist. Setzen wir dies schließlich in (13) ein und setzen den entstehenden Ausdruck aufgrund der Feldgleichungen 0, ergibt sich nach einigen einfachen Umformungen die Differentialgleichung

$$rA' = A - A^2, \tag{20}$$

die sich durch Trennung der Variablen lösen läßt:

$$\int \mathrm{d}A \frac{1}{A - A^2} = \int \frac{\mathrm{d}r}{r} = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \tag{21}$$

mit der Integrationskonstanten $-\ln r_0$. Das Integral bzgl. A läßt sich mittels Partialbruchzerlegung lösen. Es ergibt sich

$$\ln\left(\frac{A}{A-1}\right) = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \Rightarrow A(r) = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}. \tag{22}$$

Mit (19) folgt dann

$$B(r,t) = c_1(t)\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \tag{23}$$

Parametrisieren wir schließlich die Zeitkoordinate nochmals vermöge

$$t' = \int \mathrm{d}t \sqrt{c_1(t)} \tag{24}$$

um, erhalten wir schließlich notwendig die **statische Vakuum-Schwarzschild-Lösung**, d.h. für das Viererwegelement

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}r^2\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} - r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2). \tag{25}$$

Die Physikalische Bedeutung von r_0 ergibt sich aus dem nichtrelativistischen Limes, der für schwache Felder, also $r \gg r_0$ gilt. In diesem Fall ist

$$g_{11} = 1 - \frac{r_0}{r} \simeq 1 + 2\Phi, \tag{26}$$

wobei Φ das Newtonsche Gravitationspotential ist. Bezeichnen wir die Gesamtmasse der um $r = 0$ radialsymmetrisch verteilten Materie mit M, so lautet dieses

$$\Phi = -\frac{r_0}{2r} = -\frac{GM}{r} \Rightarrow r_0 = 2MG, \tag{27}$$

wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante bedeutet. Die Integrationskonstante r_0 ist der **Schwarzschild-Radius**. Bei $r = r_0$ wird die Metrik (25) scheinbar singulär, weil dann $g_{00} = 0$ und $g_{11} \to \infty$ wird. Allerdings liegt nur eine Koordinatensingularität vor. Das erkennt man daran, daß invariante, also von der Wahl der Koordinaten unabhängige Größen nicht singulär werden. Der Ricci-Tensor verschwindet aufgrund der Tatsache, daß die Schwarzschild-Lösung die Vakuum-Einstein-Feldgleichungen lösen, so daß die auch für den Ricci-Skalar der Fall ist. Diese Invariante R ist also trivialerweise regulär. Eine weitere Invariante ist die Determinante der Metrik, und für diese ergibt sich

$$-g = \det g = -r^4 \sin^2\vartheta, \tag{28}$$

und diese Größe ist stets < 0, wie es sein muß außer für $r = 0$ und für $\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = \pi$. Es zeigt sich, daß nur die Singularität im Ursprung $r = 0$ eine echte Singularität ist, vorausgesetzt es liegen keine kontinuierlichen Materieverteilungen vor, für die freilich die Vakuumlösungen der Einstein-Gleichungen nicht mehr gelten sondern man den Energie-Impuls-Tensor der Materie berücksichtigen muß.

(c) Wir gehen wieder vom allgemeinen zeitabhängigen radialsymmetrischen Viererwegelement

$$\mathrm{d}s^2 = C_1(R,t)\mathrm{d}t^2 - D_1(R,t)\mathrm{d}R^2 - 2E_1(R,t)\mathrm{d}R\mathrm{d}t - F_1(R,t)R^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2) \tag{29}$$

aus. Setzen wir dann, wie auf dem Übungsblatt angegeben,

$$t' = \int \mathrm{d}t \sqrt{C_1(R,t)}, \tag{30}$$

so folgt

$$\mathrm{d}t' = \sqrt{C}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\mathrm{d}R \int \mathrm{d}t \frac{C_1'}{\sqrt{C_1}}, \tag{31}$$

und Auflösen nach $\mathrm{d}t$ und Einsetzen in (29) liefert sofort, daß dann das Viererwegelement die Gestalt

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t'^2 - D_2(R,t')\mathrm{d}R^2 - 2E_2(R,t')\mathrm{d}r\,\mathrm{d}Rt'' - F_2(R,t')R^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{32}$$

Dabei ist der Zusammenhang zwischen den neuen Metrikkomponenten D_2, E_2 und F_2 und den entsprechenen alten Komponenten C_1, D_1 und E_1 für uns nicht wichtig.

Nun machen wir von der Annahme Gebrauch, daß die Koordinaten so gewählt sind, daß die durch $(q^1,q^2,q^3) = (R,\vartheta,\varphi) = \text{const}$ gegebenen zeitartigen Weltlinien Geodäten sind. Physikalisch bedeutet dies, daß die Koordinaten so gewählt wurden, daß in dem durch sie definierten (lokalen) Bezugssystem ruhende Teilchen frei fallen. Deshalb spricht man auch von **mitbewegten („comoving“) Koordinaten**. Das bedeutet, daß diese Weltlinien die Geodätengleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 q^\mu}{\mathrm{d}t'} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{\mathrm{d}q^\mu}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}q^\nu}{\mathrm{d}t'} = 0 \tag{33}$$

erfüllen. Dabei haben wir die Koordinatenzeit t' als Weltlinienparameter verwendet. Wegen $q^j = \text{const}$, $j \in \{1,2,3\}$ vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$\Gamma^\mu_{00} = 0. \tag{34}$$

Die Berechnung der entsprechenden Christoffelsymbole für die durch (32) gegebene Metrik ergibt, daß dann notwendig

$$\partial_{t'}E_2 = 0 \Rightarrow E_2(R,t') = E_2(R) \tag{35}$$

ist.

Offenbar ist das Integral (30) nur bis auf eine allein von R abhängige additive Konstante bestimmt. Wir können also die Zeitnullpunkte für jeden Radius R gemäß

$$\tau = t' + f(R) \Rightarrow \mathrm{d}t' = \mathrm{d}\tau - \mathrm{d}Rf'(R) \tag{36}$$

umdefinieren. Dann folgt

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - U(R,\tau)\mathrm{d}R^2 - 2[E_2(R) + f'(R)]\mathrm{d}R\mathrm{d}\tau - V(R,\tau)(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{37}$$

Setzt man also

$$f(R) = -\int \mathrm{d}rE_2(R), \tag{38}$$

nimmt das Viererwegelement demnach die gewünschte Form

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - U(R,\tau)\mathrm{d}R^2 - V(R,\tau)(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{39}$$

Man nennt solche Koordinaten **Gaußsche orthogonale Koordinaten**, weil bzgl. dieser $g_{00} = 1$ und $g_{\mu\nu}$ eine Diagonalmatrix ist.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`http://fias.uni-frankfurt.de/~hees/cosmo-SS15/`