Übungen zur Kosmologie – Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 8: Verschiedene Formen der FLRW-Metrik

(a) Aus Gl. (2) auf dem Aufgabenblatt folgt

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau\, \tilde{a}(\tau). \tag{1}$$

Dies in Gl. (1) auf dem Aufgabenblatt eingesetzt liefert sofort Gl. (3).

(b) Für $K = -1$ (offenes Universum) folgt

$$\chi(r) = \int_0^r \mathrm{d}r' \frac{1}{1 + K r^2} = \operatorname{arsinh} r \Rightarrow r(\chi) = S_{-1}(\chi) = \sinh \chi. \tag{2}$$

Für $K = 0$ (flaches Universum) ist

$$\chi = r \Rightarrow S_0(\chi) = \chi \tag{3}$$

und für $K = 1$ (geschlossenes Universum)

$$\chi = \int_0^r \mathrm{d}r' \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} = \arcsin r \Rightarrow r(\chi) = S_1(\chi) = \sin \chi. \tag{4}$$

Für $K = -1$ ist der Raumschnitt $t = \text{const}$ ein dreidimensionales Hyper-Hyperboloid. Dieses ist durch die Einbettung in einen fiktiven vierdimensionalen flachen Raum durch

$$x_4^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = a^2 \tag{5}$$

definiert und wird in den Koordinaten $(\chi, \vartheta, \varphi)$ gemäß

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \sinh \chi \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sinh \chi \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sinh \chi \cos \vartheta \\ \cosh \chi \end{pmatrix} \tag{6}$$

parametrisiert, so daß $\chi \in \mathbb{R}_{>0}$.

Für die vierdimensionale Raumzeitmetrik ist die Determinante

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -a^6(t) S_K^2(\chi) \sin^2 \vartheta. \tag{7}$$

Koordinatensingularitäten liegen also vor, falls zu irgendeinem Zeitpunkt $a(t) = 0$ ist und für $\chi = 0$ (und $\chi = \pi$ für $K = -1$) und für $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$.

Für $K = 0$ liegt ein Euklidischer $\mathbb{R}^3$ vor, und $(\chi = r, \vartheta, \varphi)$ sind gewöhnliche Kugelkoordinaten. Es ist also $\chi = r \in \mathbb{R}_{>0}$. Sowohl für $K = -1$ als auch für $K = 0$ sind die Wertebereiche für die Winkel

$$\vartheta \in (0, \pi), \quad \varphi = [0, 2\pi). \tag{8}$$

Koordinatensingularitäten liegen bei $\chi = 0$ vor.

Für $K = 1$ handelt es sich um eine dreidimensionale Hypersphäre. Ihre Einbettung in einen fiktiven viedimensionalen Euklidischen Raum ist durch die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2 \tag{9}$$

gegeben. In den Koordinaten $(\chi, \vartheta, \varphi)$ lautet die Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \sin\chi \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\chi \sin\vartheta \sin\varphi \\ \sin\chi \cos\vartheta \\ \cos\chi \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Die Hypersphäre wird offenbar durch die Wertebereiche

$$\chi \in (0, \pi), \quad \vartheta \in (0, \pi), \quad \varphi = [0, 2\pi) \tag{11}$$

bis auf die Flächen $\chi = 0$, $\chi = \pi$, $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ vollständig abgedeckt.

(c) Radiale Nullgeodäten zeichnen sich dadurch aus, daß $\vartheta = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ und daß entlang dieser Kurven $\mathrm{d}s^2 = \tilde{a}^2(\tau)(\mathrm{d}\tau^2 - \mathrm{d}\chi^2) = 0$ ist. Das ist offenbar für $\tau = \pm\chi + \text{const}$ der Fall. Vom „Koordinatenursprung“ $\chi = 0$ ausgehende Lichtstrahlen erfüllen die Gleichung mit dem oberen Vorzeichen, also $\tau - \chi = \text{const}$.

(d) Für $K = -1$ und $K = 0$ sind die Gesamtvolumina der Raumschnitte offenbar unendlich. Für $K = 1$ ergibt sich für $\mathrm{d}t = 0$ die dreidimensionale Metrik aus

$$\mathrm{d}l^2 = \tilde{g}_{jk} \mathrm{d}q^j \mathrm{d}q^k = a^2[\mathrm{d}\chi^2 + S_K^2(\chi)(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2)], \tag{12}$$

und das Gesamtvolumen ist also

$$V^{(3)} = \int_0^\pi \mathrm{d}\chi \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sqrt{\det(\tilde{g}_{jk})}. \tag{13}$$

Wegen $\det(\tilde{g}_{jk}) = a^3 \sin^2\chi \sin\vartheta$ folgt

$$V^{(3)} = 4\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\chi \sin^2\chi = \pi^2 a^3, \tag{14}$$

wobei wir in (12) $S_{-1}(\chi) = \sin\chi$ verwendet haben.

(e) Für $\chi = \text{const}$ folgt für die entsprechende Zweisphäre in den dreidimensionalen Räumen konstanter Krümmung aus (12) die Fläche

$$A^{(2)} = \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, a^2 S_K^2(\chi) = 4\pi a^2 S_K^2(\chi). \tag{15}$$

Für die Hypersphäre ($K = -1$) folgt dabei, daß die Oberfläche der darin befindlichen Zweisphäre zuächst mit χ anwächst (für $0 < \chi < \pi/2$), bei $\chi = \pi/2$ ein Maximum erreicht und dann wieder bis zu 0 bei $\chi = \pi$ abfällt.

Wie man sich anhand des analogen Sachverhaltes für Kreise auf einer gewöhnlichen Kugeloberfläche klar macht, bedeutet dieses auf den ersten Blick verwunderliche Resultat lediglich, daß die dreidimensionale Hypersphäre ein endlicher geschlossener Raum ohne Rand ist, analog dazu wie die Kugelsphäre im gewöhnlichen dreidimensionalen Euklidischen Raum eine endliche geschlossene Fläche ohne Rand ist.

Aufgabe 9: Zustandsänderung des kosmischen Substrats mit der Hubble-Expansion

(a) Unter Verwendung von Gl. (11) auf dem Aufgabenblatt und den dort angegebenen Christoffel-Symbolen erhält man nach einiger Rechnung

$$\mathrm{D}_\mu T^{\mu 0} = \dot{\epsilon} + \frac{3\dot{a}(\epsilon + P)}{a}, \quad \mathrm{D}_\mu T^{\mu j} \equiv 0 \quad \text{für} \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{16}$$

Die lokale Energieerhaltung besagt also, daß

$$\dot{\epsilon} + \frac{3(\epsilon + P)\dot{a}}{a} = 0 \tag{17}$$

ist. Multiplizieren dieser Gleichung mit a^3 ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\epsilon a^3) + P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a^3 = 0. \tag{18}$$

(b) Aus (17) ergibt sich für **nichtrelativistische Staubmaterie**, also $P = 0$

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = -\frac{3\dot{a}}{a}. \tag{19}$$

Durch Integration folgt

$$\ln\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) = -3\ln\left(\frac{a}{a_0}\right) \Rightarrow \epsilon a^3 = \epsilon_0 a_0^3 = \text{const.} \tag{20}$$

Für **ultrarelativistische Materie bzw. Strahlung** gilt $P = \epsilon/3$ und damit folgt aus (17)

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = -\frac{4\dot{a}}{a} \Rightarrow \epsilon a^4 = \epsilon_0 a_0^4 = \text{const.} \tag{21}$$

(c) Das dreidimensionale Volumenelement ergibt sich aus der Metrik mit $\mathrm{d}t = 0$ zu

$$\mathrm{d}V^{(3)} = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\sqrt{-\det(g_{ab})} = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi a^3 \frac{r^2}{\sqrt{1-Kr^2}}\sin\vartheta. \tag{22}$$

(d) Multiplizieren wir also (18) mit $r^2\sin\vartheta/\sqrt{1-Kr^2}$ und beachten, daß dieser Ausdruck zeitunabhängig ist, folgt

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + P\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}U = -P\mathrm{d}V. \tag{23}$$

(e) Interpretiert man das kosmische Substrat als ideales relativistisches Fluid und entsprechend den Energie-Impulstensor mit ϵ als Energiedichte und P als Druck, so folgt aus (23) und der allgemeinen kalorischen Zustandsgleichung

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V, \tag{24}$$

wobei S die Entropie bezeichnet, daß für die Zustandsänderung aufgrund der Hubble-Expansion

$$\mathrm{d}S = 0 \tag{25}$$

gilt. Die Zustandsänderung des kosmischen Substrats aufgrund der Hubble-Expansion ist also **adiabatisch**. Dies ist wiederum konsistent mit der Annahme eines idealen Fluids, das sich definitionsgemäß zu jedem Zeitpunkt im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht maximaler Entropie befindet, d.h. daß die Entropie während der hydrodynamischen Strömung lokal erhalten bleibt.

Aufgabe 10: Zeitentwircklung des Skalenparameters für ein strahlendominiertes Universum

(a) Aus der auf dem Aufgabenblatt angegebenen Friedmann-Gleichung für $\Lambda = 0$ folgt nach einfachen Umformungen wegen (21)

$$a^2\dot{a}^2 + Ka^2 = \frac{\varkappa\epsilon}{3}a^4 = \frac{\varkappa\epsilon_0}{3}a_0^3 = C_0^2 = \text{const.} \tag{26}$$

(b) Für $K = 0$ (flaches Universum) folgt

$$a\dot{a} = C_0 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a^2 = C_0 \Rightarrow a = \sqrt{2C_0 t}, \tag{27}$$

wobei wir von der Anfangsbedingung $a(0) = 0$ Gebrauch gemacht haben.

(c) Für $K = +1$ (geschlossenes Universum) führen wir die angegebene Substitution

$$a = C_0 \sin\eta = 2C_0 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)\cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \tag{28}$$

in (26) aus. Daraus folgt zunächst

$$C_0^4\dot{\eta}^2\cos^2\eta\sin^2\eta + C_0^2\sin^2\eta = C_0^2. \tag{29}$$

Nach einer einfachen Umformung folgt

$$\dot{\eta} = \frac{1}{C_0\sin\eta} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\eta} = C_0\sin\eta \Rightarrow t(\eta) = C_0(1-\cos\eta) = 2C_0\sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right). \tag{30}$$

Drücken wir in (28) $\sin(\eta/2)$ und $\cos(\eta/2)$ vermöge (30) durch t aus, folgt

$$a(t) = \sqrt{t(2C_0 - t)}. \tag{31}$$

Für $K = -1$ erfolgt die Rechnung vollkommen analog mit der angegebenen Substitution

$$a = C_0\sinh\eta = 2C_0\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)\cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \tag{32}$$

die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\eta} = C_0\sinh\eta \Rightarrow t = C_0(\cosh\eta - 1) = 2C_0\sinh^2\left(\frac{\eta}{2}\right). \tag{33}$$

Eliminieren wir damit η aus (32), folgt

$$a(t) = \sqrt{t(2C_0 + t)}. \tag{34}$$

Die Lösungen für alle drei Werte des Krümmungsparameters lauten demnach gemäß (27), (31) und (34)

$$a(t) = \sqrt{t(2C_0 - Kt)}. \tag{35}$$

(d) Das flache und offene Universum besitzt eine Singularität bei $t = 0$, denn dann und nur dann wird $a = 0$ und somit $\det(g_{\mu\nu}) = 0$. Dieses Universum weist also einen Urknall auf und besteht dann für alle Zeiten. Für das geschlossene Universum gibt es ebenfalls einen Urknall bei $t = 0$. Allerdings wird nach der endlichen Zeit $t = 2C_0 > 0$ ebenfalls $a = 0$, d.h. das geschlossene Universum kontrahiert für $t > C_0$ nach anfänglicher Expansion für $t < C_0$ und kollabiert zur Zeit $t = 2C_0$ erneut zu einer Singularität („big crunch").