Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2015**

Übungen zur Kosmologie – Lösungen zu Blatt 5

Aufgabe 11: Die Leuchtkraftentfernung

1. Flaches Universum

(a) Für ein flaches Universum ($\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$) fällt der Integrand in (2) desto langsamer je höher der Anteil von Ω_Λ ist. Somit steigt der Betrag des Integrals und damit auch d_L mit steigendem Ω_Λ.

(b) Zunächst der Grenzfall $\Omega_M = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$:

$$\begin{aligned} d_\mathrm{L}(z) &= \frac{c(1+z)}{H_0}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{\sqrt{(1+z')^3}} = \frac{c(1+z)}{H_0}\int_1^{1+z}\frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}} \\ &= \frac{c(1+z)}{H_0} 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) \\ &= \frac{2c}{H_0}(1+z-\sqrt{1+z}) \end{aligned} \tag{1}$$

Damit ergibt sich $d_\mathrm{L}(1) = 5{,}018$ Gpc.

Nun der Grenzfall $\Omega_M = 0$, $\Omega_\Lambda = 1$:

$$d_\mathrm{L}(z) = \frac{c(1+z)}{H_0}\int_0^z dz' = \frac{c}{H_0}(z+z^2)$$

Hier lautet das Ergebnis $d_\mathrm{L}(1) = 8{,}565$ Gpc.

(c) In erster Ordnung der Taylor-Entwickung ergibt sich mit $\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega_M(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}} = 1 - \frac{3}{2}\Omega_M z' + \mathcal{O}(z'^2)$$

und somit

$$d_\mathrm{L}(z) = \frac{c(1+z)}{H_0}\left[z - \frac{3}{4}\Omega_M z^2 + \mathcal{O}(z^3)\right]. \tag{2}$$

Diese Näherung stimmt für $z < 1$ und $\Omega_M < 0{,}5$ mit weniger als 1% Fehler mit dem numerischen Resultat überein. Eine Entwicklung in höherer Ordnung verschlechtert die Näherung (insbesondere für $z \sim 1$) deutlich.

(d) Einsetzen in das Ergebnis aus (c) ergibt $d_\mathrm{L}(1) \approx 6{,}638$ Gpc.

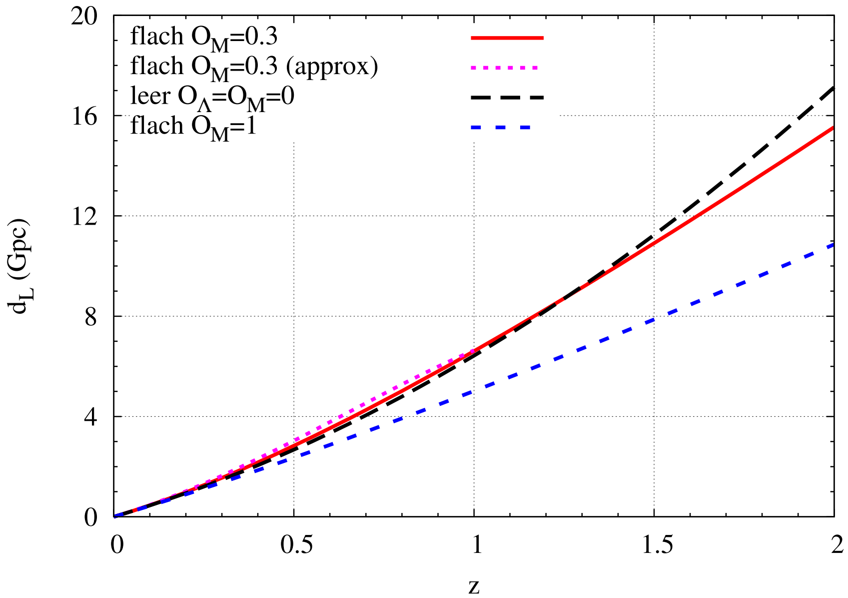

Abbildung 1: Leuchtkraftentfernung in Abhängigkeit von der Rotverschiebung z für ein flaches Universum mit $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ (durchgezogen rot, Näherung gem. (2) für $z < 1$ gepunktet magenta), ein leeres Universum (gestrichelt schwarz) und ein flaches Universum mit $\Omega_M = 1$ (gestrichelt blau).

2. Hyperbolisches Universum

(e) Für ($\Omega_\Lambda = \Omega_M = \Omega = 0$) ergibt sich

$$d_\mathrm{L}(z) = \frac{c(1+z)}{H_0}\sinh\left(\int_0^z \frac{dz'}{1+z'}\right) = \frac{c(1+z)}{H_0}\sinh[\ln(z+1)]. \tag{3}$$

Benutzt man nun noch, daß

$$\sinh[\ln(x+a)] = \frac{1}{2}\left(x+a-\frac{1}{x+a}\right) \tag{4}$$

gilt, so erhält man schließlich

$$d_\mathrm{L}(z) = \frac{c}{H_0}\left(\frac{z^2}{2}+z\right).$$

(f) Mit dem Ergebnis aus (e) ergibt sich direkt $d_\mathrm{L}(1) = 6{,}424$ Gpc und damit ein sehr ähnliches Ergebnis wie für das Konkordanzmodell (vgl. auch Abb. 1). Daher beschreibt ein leeres bzw. ein Universum geringer Dichte die Leuchtkraftentwicklung von SN Ia auch recht gut, was als Motivation für sogenannte Void-Modelle gilt, in denen versucht wird, die beschleunigte Expansion des Universums durch unsere Lage in einer großräumigen unterdichten Region des Universums zu erklären.

(g) Zunächst Teilaufgabe (b), hier gilt für den Grenzfall $\Omega_M = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$

$$d_\mathrm{L}(z) = \frac{c(1+z)}{H_0}2\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) = \frac{c}{H_0}\left[z-\frac{3}{4}z^2+\mathcal{O}(z^3)\right], \tag{5}$$

woraus man $q_0 = 1/2$ abliest.

Nun zum Grenzfall $\Omega_M = 0, \Omega_\Lambda = 1$:

$$d_{\mathrm{L}}(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} z.$$

Damit muß $q_0 = -1$ sein, da der quadratische Term in z verschwindet. Für Teilaufgabe (c) ergibt sich aus (5) unmittelbar $q_0 = \frac{3}{2}\Omega_M - 1$. Es liegt demnach eine beschleunigte Expansion des Universums vor ($q_0 < 0$), wenn $\Omega_M < 2/3$ ist. Für (d) ergibt sich dann durch Einsetzen $q_0 = -0{,}55$.

Und zuletzt ergibt sich für (e):

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{L}}(z) &= \frac{c}{H_0}\left(\frac{z^2}{2} + z\right) = \frac{c(1+z)}{H_0}\left(\frac{z^2}{2} + z\right)\frac{1}{1+z} \\ &= \frac{c(1+z)}{H_0}\left(\frac{z^2}{2} + z\right)[1 - z + \mathcal{O}(z^2)] = \frac{c(1+z)}{H_0}\left[1 - \frac{z^2}{2} + \mathcal{O}(z^3)\right] \end{aligned} \tag{6}$$

und damit $q_0 = 0$.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`http://fias.uni-frankfurt.de/~hees/cosmo-SS15/`