Kosmologie - Vertiefungs-VLsg. 05/05/15

- Ergänzend zu Neutronensternen und ihrer Berechnung

Auf einen Stern wirken zwei Kräfte

(1) • Gravitation

(2) • Druck (thermischer Druck bei gewöhnl. Sternen; Entartungsdruck bei kompakten Objekten)

(1) $$\boxed{dF = -\frac{G\,dm \cdot m(r)}{r^2}}$$

G = Grav.konstante
r = Radius (sphär. symm. System)

(2) $$\boxed{dp = \frac{dF}{dA} = \frac{dF}{4\pi r^2}}$$

p = Druck
F = Kraft
A = (Ober-)fläche, auf welcher der Druck angreift

mit

$$\boxed{dm = \rho\, dV = \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr}$$

ρ = Massendichte

$$dp = -\frac{G\,m(r)\,dm}{r^2 \cdot dA} = -\frac{G\,m(r)}{r^2\,\cancel{4\pi r^2}}\,\rho(r)\,\cancel{4\pi r^2}\,dr$$

(3) $$\boxed{\frac{dp}{dr} = -\frac{G\,m(r)\,\rho(r)}{r^2}}$$

(4) $$\boxed{\frac{dm}{dr} = \rho(r)\, 4\pi r^2}$$

Massendichte $\rho(r) \to$ Energiedichte $\varepsilon(r)$
(da relativistisch)

$$(5) \quad \boxed{\rho(r) = \frac{\varepsilon(r)}{c^2}}$$

Substituiere (5) in (4) und (3):

$$(6) \quad \boxed{\frac{dp}{dr} = -\frac{G\, m(r)\, \varepsilon(r)}{c^2 r^2}} \qquad (7) \quad \boxed{\frac{dm}{dr} = \frac{\varepsilon(r)\, 4\pi r^2}{c^2}}$$

(6) und (7) sagen also aus, wie sich Druck und Masse mit dem Radius ändern.
Hier löst man zwei gekoppelte DGL'S, wobei [illegible] man im Zentrum des Sterns startet, die Masse zu- und der Druck abnimmt (siehe die VZ in (6) und (7))

Startwerte: $\boxed{\begin{aligned} m\,(r=0) &= 0 \\ p\,(r=0) &= p_0 \end{aligned}}$

Zur Lösung der beiden Gleichungen muß eine Zustandsgleichung $p(\varepsilon(r))$ bekannt sein.
(Also die Relation zwischen Druck und (Massen-)Energiedichte)

Die TOV-Gleichungen

- wurden ja in der Vorlesung hergeleitet
- Aus den Einstein-Gleichungen
  - hydrostat. Gleichgewicht im Stern $(u^\mu = (u^0; \vec{0}))$

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho_0 c^2 e^\nu & & & 0 \\ & p e^\lambda & & \\ & & p r^2 & \\ 0 & & & p r^2 \sin^2\vartheta \end{bmatrix}$$

...

$$\frac{dM(r)}{dr} = \frac{4\pi r^2 \mathcal{E}(r)}{c^2}$$

← wie bei Newton, weil „Feldenergie" bereits enthalten (ohne Feldenergie ist die Frage nach der Masse in GR sinnlos.

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\,\mathcal{E}(r)M(r)}{c^2 r^2} \cdot$$

$$\left[1 + \frac{p(r)}{\mathcal{E}(r)}\right]$$

← In GR ist nicht nur die Masse Quelle der Gravitation, sondern alle Einträge von $T_{\mu\nu}$

$$\left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)c^2}\right]$$

← In GR wirkt die Gravitation nicht nur auf die Masse, sondern auch auf den Druck (bzw. Energiedichte)

$$\left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]^{-1}$$

← Einfluß der Schwarzschild-Metrik (⇒ RZ-Krümmung)

↳ Druck erzeugt allg. relativistisch noch mehr Druck (alle Faktoren > 1)

Herleitung einer Zustandsgleichung

- Materie im Weißen Zwerg:
  - Ideales Fermi Gas von Elektronen
  - Zur Gewährung der Ladungsneutralität gehören dann noch Protonen

Fermi-Dirac-Verteilung → ideales Gas
→ Verteilung in Abhg.kt. der Energie

(8)
$$\boxed{f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}}$$

E = Energie

μ = chem. Pot.

k_B = Boltzmann-Konst

T = Temperatur

$1 = 1$

Im Phasenraum (Impuls)

(9)
$$\boxed{\frac{dn_i}{d^3k} = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} f(E)}$$

$(2\pi\hbar)^3$ = unit volume

g = Anzahl der Zustände (bei gegebenem k)

n_i = Teilchendichte (Anzahldichte)

z.B.: $g = 2$ für Elektronen

(10)
$$\boxed{n_i = \int \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} f(E)\, d^3k}$$

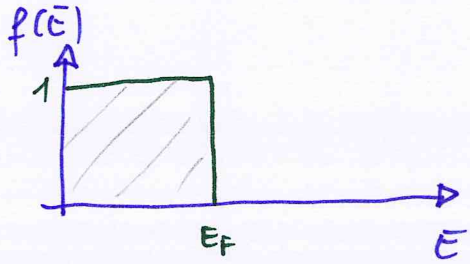
Für entartete Fermionen kann man $T=0$ annehmen, da Quantensystem „$E_{KIN} \gg E_{THERM}$"
(z.B. auch über US-Relation $\Delta x \cdot \Delta p \simeq \hbar/2$

e^- sind zusammengepresst, folglich
$p \gg x$
also $p \gg T$
oder $m_e c^2 \gg k_B T$

Jedenfalls, um dem System „beizutreten", muß ein Teilchen mind. eine Energie haben, die der Fermi Energie entspricht (alle and. Energieniveaus sind bereits besetzt) $\Rightarrow$ entspricht dem chem. Potential

$$\boxed{\mu = E_F}$$

(11)
$$\boxed{f(E) = \begin{cases} 1 & \text{für } E < E_F \\ 0 & \text{für } E > E_F \end{cases}}$$



Für Elektronen (vernachlässige elektrostat. WW) folgt

$$n_e = \int_0^{k_F} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \overset{f(E)=1}{\,} d^3k = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} k^2\, dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

(f.d. besetzten Zustände)

$$\boxed{d^3k = 4\pi k^2\, dk}$$
↳ sphär. symm.

(12)
$$\boxed{n_e = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3}}$$

Ladungsneutralität besagt $\# e^- = \# p^+$

Für einen Kohlenstoff-Zwerg ^{12}C ist $\boxed{\frac{A}{Z} = 2}$ Massenzahl Protonenzahl

$A = Z + N$
$Z = N$
$A = 2Z$

Im weiteren vernachlässigt man für die Massendichte die Elektronen, da $m_{p^+} \simeq 1836\, m_{e^-} \simeq m_{Nucleon}$ → Wieviele Nucl. per Elektron

Die Massendichte ist $\boxed{\rho = n_e \cdot m_N \cdot \frac{A}{Z}}$

Mit (12) ergibt sich dann

$$\boxed{k_F = \hbar \cdot \sqrt[3]{\frac{3\pi^2 \rho Z}{A\, m_N}}} \quad (13)$$

Der Impuls der Nukleonen kann, vgl. mit ihrer Restmasse, vernachlässigt werden (p^+ geben also keinen signifikanten Beitrag zum Druck). Den größten Anteil des Impulses steuern die Elektronen bei, die sich wie ein entartetes Gas verhalten (haben großen Impuls $\hat{=}$ großen Geschw.heiten).

- Elektronen verantwortlich f.d. Druck! (kaum Masse)
- Die Nukleonen steuern die (Massen-) Energiedichte bei. (kaum Impuls)

$$\boxed{\epsilon = \underbrace{n\, m_N \frac{A}{Z} c^2}_{\epsilon \simeq \rho c^2 \text{ (siehe (5))}} + \mathcal{E}_{e^-}(k)} \rightarrow \text{ges. Energiedichte!}$$

→ (steckt dann in k_F bei $\mathcal{E}_{e^-}$)

Die Energiedichte ist

$$\mathcal{E}_\varepsilon = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{k_F} E(k)\, k^2\, dk$$

wobei $E(k) = \sqrt{k^2c^2+m^2c^4}$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{k_F}\left(k^2c^2+m^2c^4\right)^{1/2} k^2\, dk}$$

(14.5) $\boxed{u = \frac{k}{mc}}$

(14) $$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{\pi^2\hbar^3}\int_0^{k_F/mc} m^4c^5\sqrt{u^2+1}\; u^2\, du}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\int_0^{x}\sqrt{u^2+1}\; u^2\, du$$

(14.5) $\boxed{x = \frac{k}{mc}}$ $\boxed{\mathcal{E}_0 = \frac{m_e^4c^5}{\pi^2\hbar^3}}$ (14.6)

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{8}\left[(2x^3+x)(x^2+1)^{1/2} - \sinh^{-1}(x)\right]}$$

– relat. E-p-Beziehung –

$$p^\mu = [E/c, \vec{p}]$$

$$p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - p^2$$

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2 \quad \text{(weil } p^\mu = m u^\mu,\; p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu)$$

$$\Rightarrow E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2$$

$$\sqrt{k^2c^2+m^2c^4}\; dk\, k^2$$

$$\sqrt{m^2c^4\left(\frac{k^2c^2}{m^2c^4}+1\right)}\; u^2m^2c^2\, dk$$

$$m^3c^4\sqrt{u^2+1}\; u^2\, dk$$

$$dk = mc\, du$$

$$= m^4c^5\sqrt{u^2+1}\; u^2\, du$$

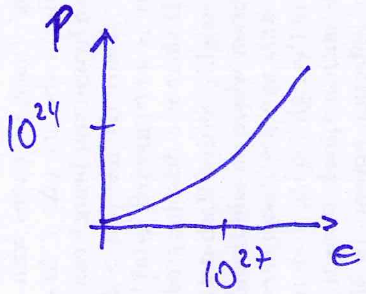
Für den Druck:

$$p = \frac{1}{3}\,\frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{k_F}\frac{k^2c^2}{E(k)}\, k^2\, dk$$

$$= \frac{8}{3}\,\frac{\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{k_F}\left(k^2c^2+m^2c^4\right)^{-1/2} c^2k^4\, dk$$

$$p = \frac{\varepsilon_0}{3} \int_0^{k_F/mc} (u^2+1)^{-1/2} u^4 \, du$$

$$p = \frac{\varepsilon_0}{24} \left[(2x^3 - 3x)(1+x^2)^{1/2} + 3 \sinh^{-1}(x) \right]$$



$p \sim \varepsilon^{4/3}$ (k läuft durch)

$p < \epsilon$ da dominiert von de Masse der Nukleonen

Man ist also an einer EoS $p(\varepsilon)$ interessiert.

Betrachte den nicht-rel. Fall $\boxed{k \ll m_e c}$ Impuls kleiner als Ruhemasse

$$p(k_F) = \frac{\varepsilon_0}{3} \int_0^{k_F/mc} (u^2+1)^{-1/2} u^4 \, du \overset{(1)}{=} \frac{\varepsilon_0}{3} \int_0^{k_F/mc} u^4 \, du = \frac{\varepsilon_0}{15} u^5$$

(1) $u = \frac{k}{mc} \xrightarrow{k \ll mc} \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{k}{mc}\right)^2 + 1\right)}} = 1$ | aus (14.6): $\varepsilon_0 = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3}$ aus (5): $\rho = \frac{\varepsilon}{c^2}$

aus (13.5): $u = \frac{k_F}{m_e c}$

aus (13): $k_F = \hbar \left[\frac{3\pi^2 \rho Z}{A m_N} \right]^{1/3}$

$$p(k_F) = \frac{m_e^4 c^5 \hbar^5}{\pi^2 \hbar^3 \cdot 15} \frac{1}{m^5 c^5} \cdot \left[\frac{3\pi^2 \rho Z}{A m_N} \right]^{5/3}$$

$$p(\varepsilon) = \underbrace{\frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \cdot \left(\frac{3\pi^2 Z}{A m_N c^2} \right)}_{K} \varepsilon^{5/3} = K \epsilon^{5/3}$$

$$\boxed{p = K \epsilon^{5/3}}$$

Relativistischer Fall $k \gg m_e c$

$$p(k_F) = \frac{\varepsilon}{3}\int_0^{k_F/mc} (u^2+1)^{-1/2} u^4 \, du = \frac{\varepsilon}{3}\int_0^{k_F/mc} u^3 \, du$$

$$u = \frac{k}{mc} \xrightarrow{k \gg mc} \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2}{m^2c^2} + \cancel{1}}} = \frac{1}{u}$$

$$\boxed{p(\varepsilon) = K_{rel}\, \epsilon^{4/3}} \qquad K_{rel} = \frac{\hbar c}{12\pi^2}\left(\frac{3\pi^2 Z}{m_N c^2 A}\right)^{4/3}$$

$$\boxed{p(\varepsilon) = K \epsilon^{\gamma}}$$

Nennt man Polytrope Zustandsgleichung

Für WZ nehme m_e

Für NS nehme m_N

Bevor man irgendwas rechnet, kann man ja mal schauen, wo (in etwa) man landen will!

Größen abschätzen

- Stern ist stabil, wenn $R > R_S$ (sonst BH) (Schwarzschild-Radius)
- Ein „einfacher" Stern besteht aus A Nukleonen mit $m \approx 940\,\text{MeV}$ ($\hat{=}\ 1{,}6 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$) mit $r_0 \approx 0{,}5 \cdot 10^{-15}\,\text{m}$ (dort wird NUC-NUC WW repulsiv)
- $V = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$ wobei $\frac{4}{3}\pi \approx 1$

$\Rightarrow \boxed{R_{STERN} = r_0 A^{1/3}}$

- Masse des Sterns ist $\boxed{M \approx m \cdot A}$

Im Limit $R = \frac{2GM}{c^2}$

$$\frac{2MG}{c^2 r_0} = A^{1/3} \longrightarrow \text{mit} \quad \frac{2GmA}{c^2 r_0} = A^{1/3}$$

$$\Rightarrow A = \left[\frac{c^2 r_0}{2Gm}\right]^{3/2}$$

$$A = \left[\frac{\cancel{9}^{\,3} \cdot 10^{16} \cdot 5 \cdot 10^{-16} \cdot \cancel{3}\cdot \cancel{5}^{\,2}}{\cancel{2 \cdot 20}_{\,4\!/\!2} \cdot \cancel{8} \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-11}}\right]^{3/2} \simeq \left[2 \cdot 10^{38}\right]^{3/2} \cong \sqrt{8} \cdot 10^{\frac{114}{2}}$$

$$\cong 2{,}6 \cdot 10^{57} \text{ Teilchen}$$

$$R_{STERN} = r_0 A^{1/3}$$

- $R = 5 \cdot 10^{-16} \cdot [\sqrt{8}]^{1/3} \cdot 10^{19} \simeq [\sqrt[3]{8}]^{1/2} \cdot 5 \cdot 10^{3}$

$$= \sqrt{2} \cdot 5 \cdot 10^{3} \simeq 7 \cdot 10^{3}\, m$$

$$\simeq \underline{\underline{7\, km}}$$

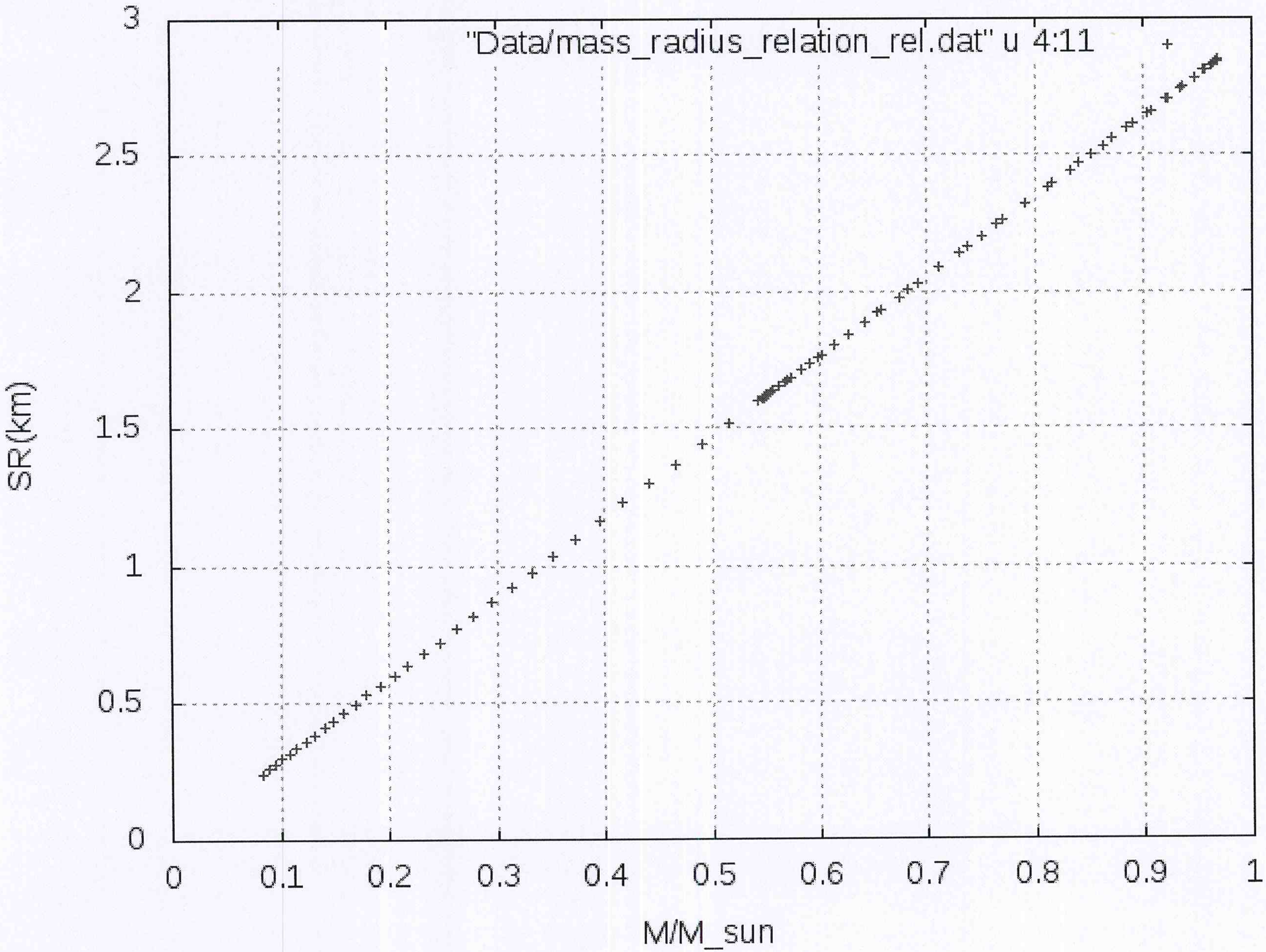
- $M = m A \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 2{,}6 \cdot 10^{57} = \frac{8}{5} \cdot \frac{13}{5} \cdot 10^{30}$

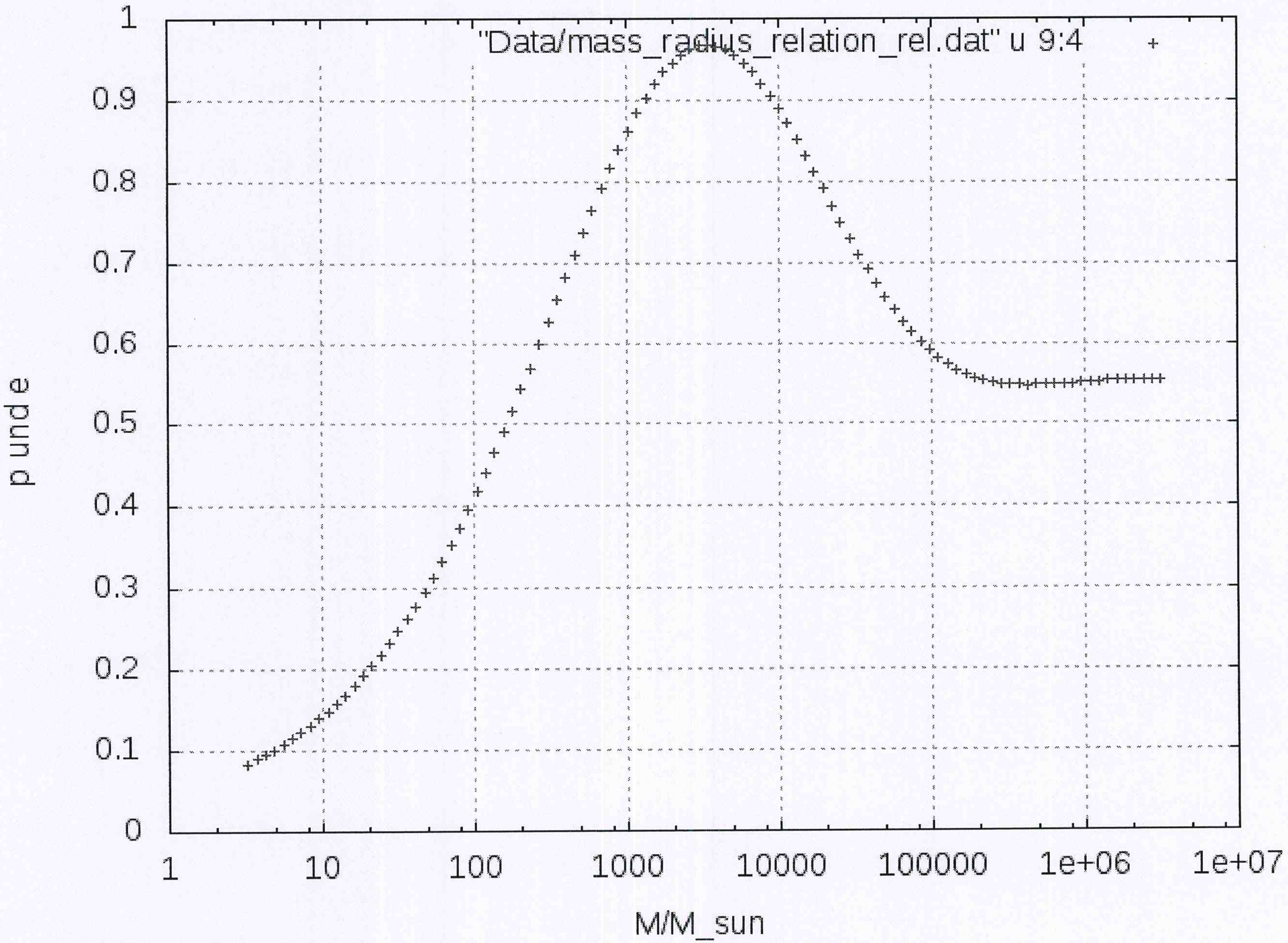
$$= \frac{104}{25} \cdot 10^{30}$$

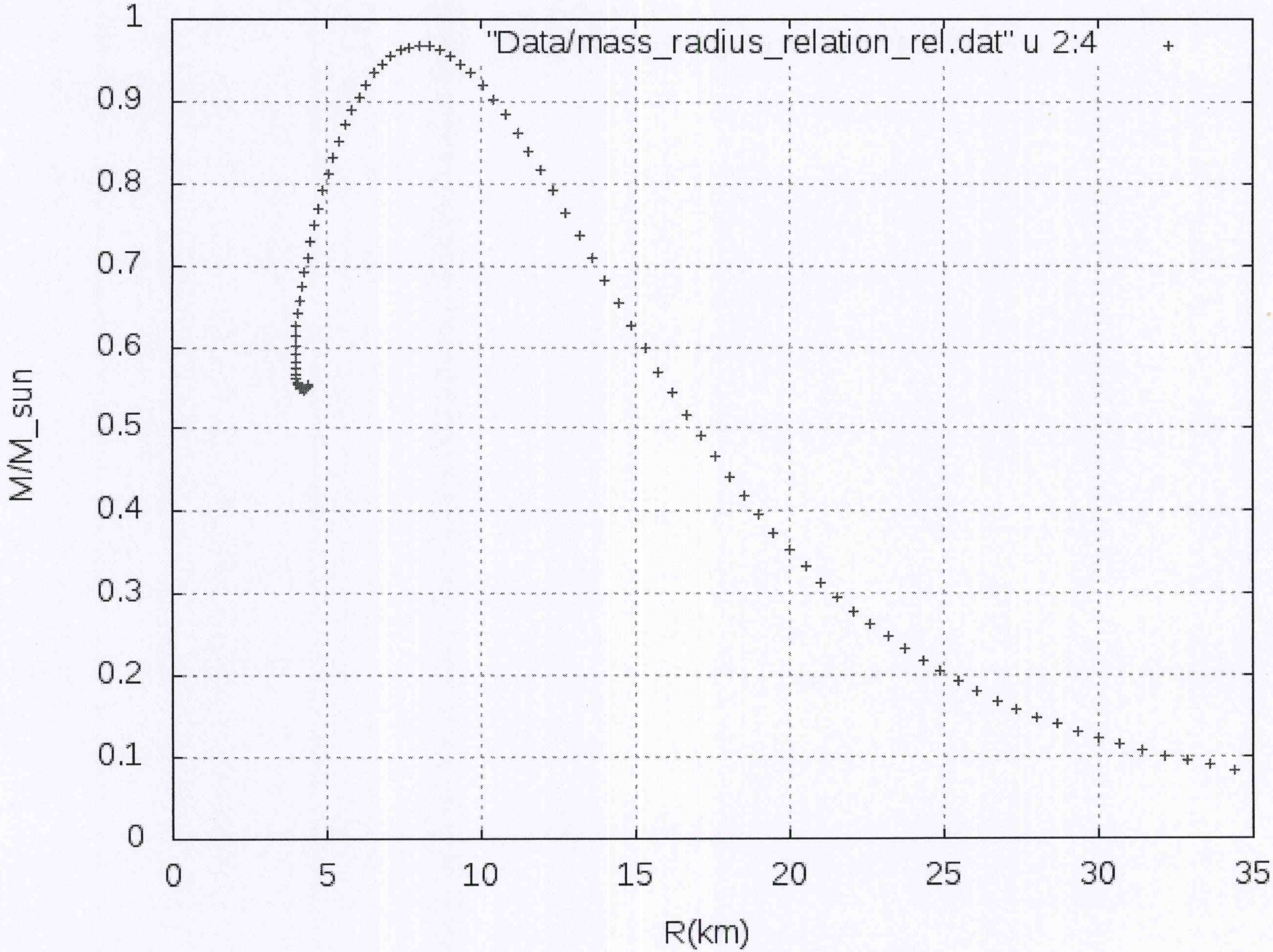
$$\simeq 4{,}16 \cdot 10^{30}\, kg$$

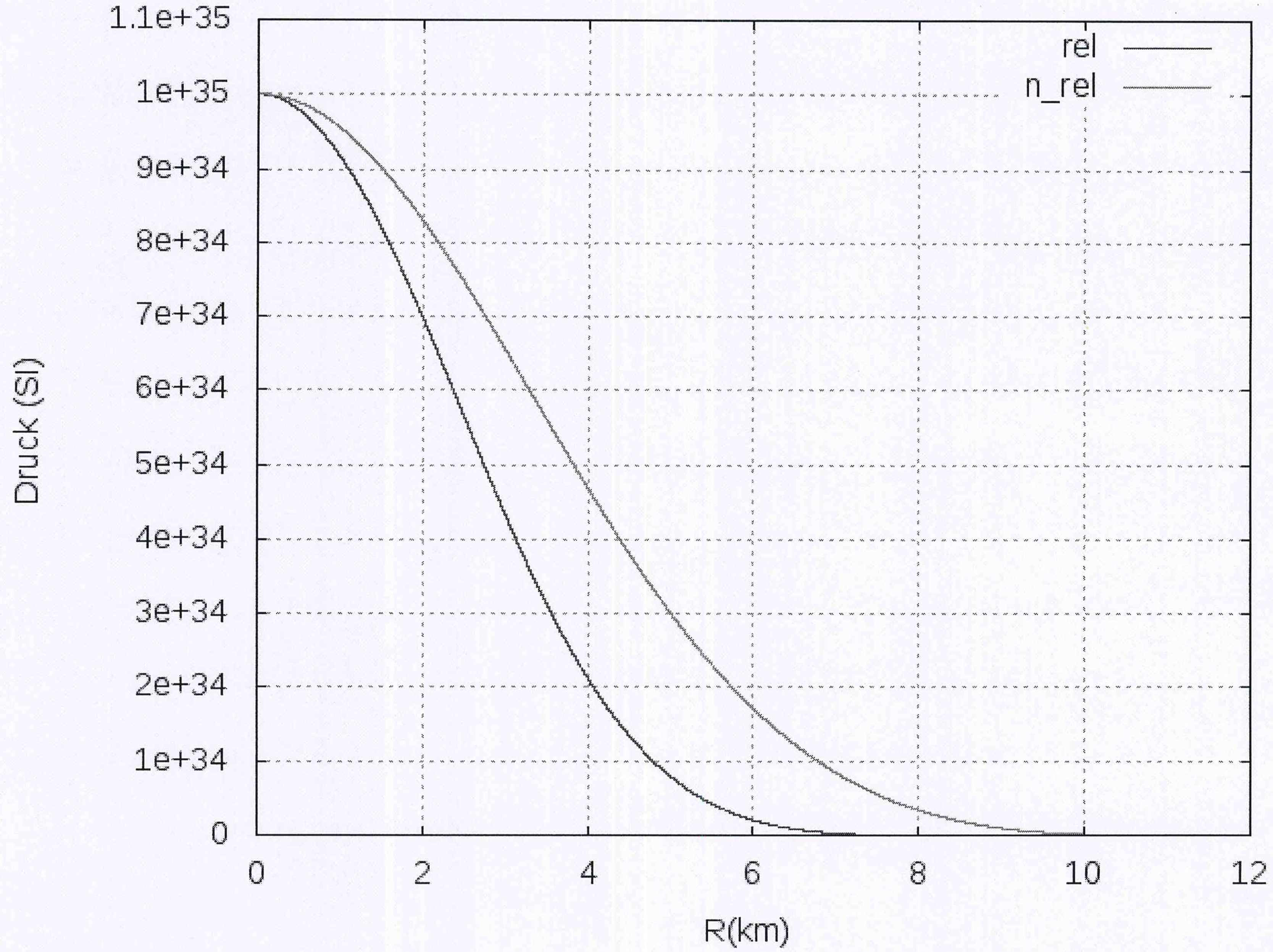
$$\simeq \underline{\underline{2 M_\odot}}$$ (etwas mehr)

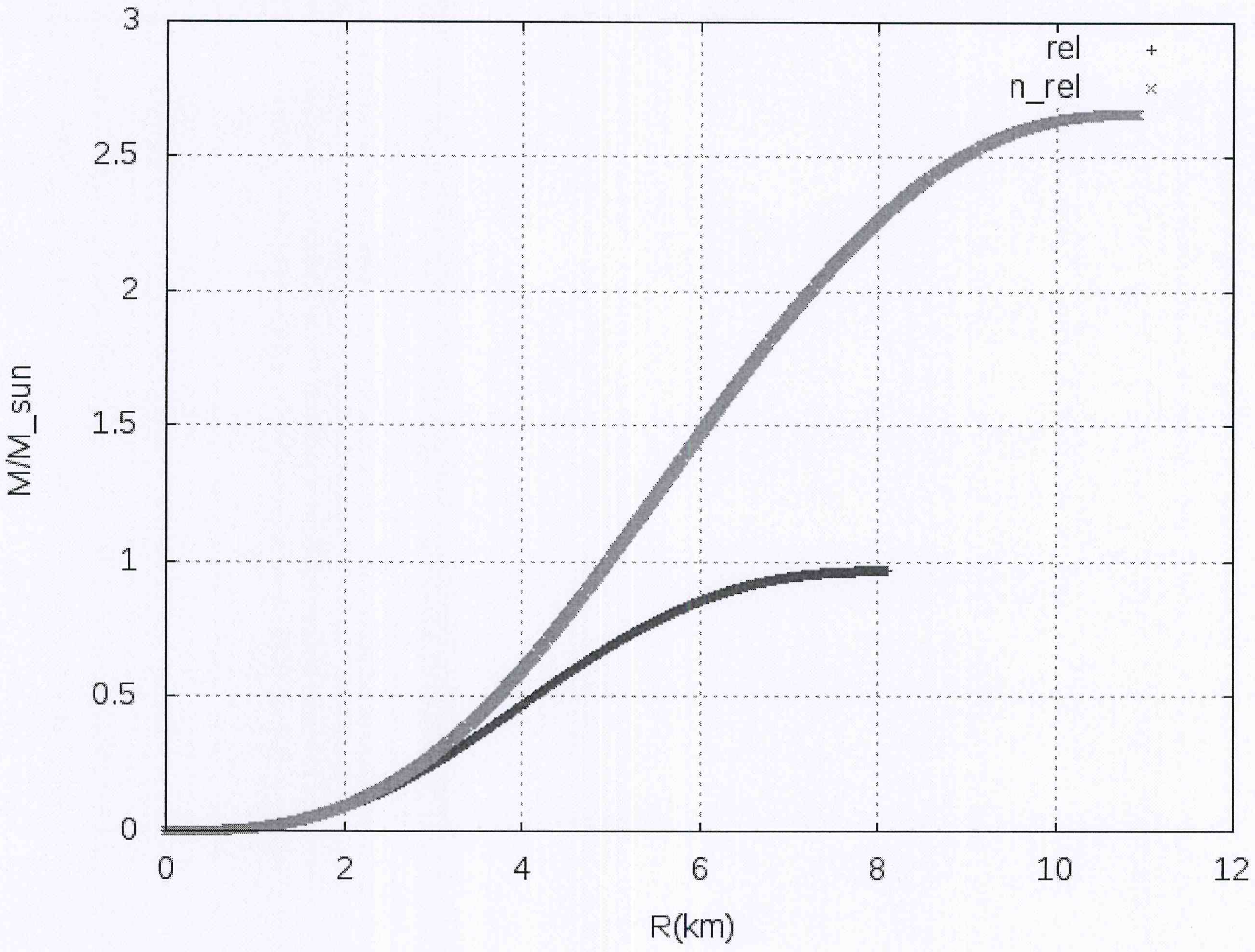
Da die Materie an der Oberfläche weniger dicht (als im Zentrum) ist, nimmt man einen etwas größeren Radius (und ggf. kleinere Masse an) → <u>$2 M_\odot$ bei 10 km Radius</u>


"Data/mass_radius_relation_rel.dat" u 4:11
SR(km)
M/M_sun
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


"Data/mass_radius_relation_rel.dat" u 9:4
p und e
M/M_sun
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1
10
100
1000
10000
100000
1e+06
1e+07


"Data/mass_radius_relation_rel.dat" u 2:4
M/M_sun
R(km)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
5
10
15
20
25
30
35


rel
n_rel
1.1e+35
1e+35
9e+34
8e+34
7e+34
6e+34
5e+34
4e+34
3e+34
2e+34
1e+34
0
Druck (SI)
0
2
4
6
8
10
12
R(km)


rel
n_rel
M/M_sun
R(km)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0
2
4
6
8
10
12