Übungen zur Kosmologie – Blatt 4

Aufgabe 8: Verschiedene Formen der FLRW-Metrik

Die Standardform der Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker- bzw. FLRW-Metrik ist in **mitbewegten Koordinaten** durch

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-Kr^2} + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right] = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2 \tag{1}$$

gegeben[1]. Dabei ist $K \in \{-1, 0, 1\}$ entsprechend einem offenen, flachen bzw. geschlossenen Universum.

(a) Führen Sie über

$$\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} \tag{2}$$

die konforme Zeit τ ein und zeige Sie, daß dann die FLRW-Metrik die Form

$$\mathrm{d}s^2 = \tilde{a}^2(\tau)\left\{\mathrm{d}\tau^2 - \left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-Kr^2} + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right]\right\} \quad \text{mit} \quad \tilde{a}(\tau) = a[t(\tau)] \tag{3}$$

annimmt.

(b) Führen Sie statt der Radialkoordinate die Größe

$$\chi = \int_0^r \mathrm{d}r' \frac{1}{\sqrt{1-Kr'^2}} \tag{4}$$

ein und berechnen Sie die Umkehrfunktion $r(\chi)$. Zeigen Sie, daß dann die FLRW-Metrik bzgl. Koordinaten $(t, \chi, \vartheta, \varphi)$ die Form

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\mathrm{d}\chi^2 + S_K^2(\chi)(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right] \tag{5}$$

annimmt. Dabei ist

$$S_K(\chi) = \begin{cases} \sinh\chi & \text{für} \quad K = -1, \\ \chi & \text{für} \quad K = 0, \\ \sin\chi & \text{für} \quad K = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Welches sind für die drei Fälle $K \in \{-1, 0, 1\}$ die Wertebereiche für χ, so daß die Raumschnitte jeweils einmal möglichst komplett abgedeckt werden, und wo sind Koordinatensingularitäten?

(c) Zeigen Sie, daß durch $\tau - \chi = \text{const}$ radiale Nullgeodäten, also die Weltlinien von Lichtstrahlen („Photonen“) mit $\vartheta = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ gegeben sind.

(d) Betrachten Sie nun mit Hilfe der Koordinaten $(\chi, \vartheta, \varphi)$ die maximal symmetrischen Raumschnitte $t = \text{const}$ für die drei Fälle $k \in \{-1, 0, 1\}$. Wie groß sind die jeweiligen Gesamtvolumina der Raumschnitte?

[1] Wir setzen für diese Übung bequemerweise $c = 1$.

(e) Wie groß ist die zweidimensionale Fläche einer durch $\chi = \chi_0 = \text{const}$ definierten „Sphäre"?
Antwort: $4\pi a^2(t) S_K^2(\chi)$.

Aufgabe 9: Zustandsänderung des kosmischen Substrats mit der Hubble-Expansion

Auf großräumigen Skalen wird die Raum-Zeit des Universums durch eine FLRW-Metrik (1) beschrieben. Die Einsteinschen Feldgleichungen mit kosmologischer Konstante lauten

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} = -\varkappa T_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta}. \tag{7}$$

Aufgrund der Bianchi-Identität $\mathrm{D}_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$ und wegen der Verträglichkeit der Metrik mit der kovarianten Ableitung, d.h. $\mathrm{D}_\gamma g^{\alpha\beta} = 0$ folgt, daß notwendig die Gleichung

$$\mathrm{D}_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{8}$$

gilt, die die lokale Energieerhaltung für Materie und Strahlung beschreibt.

(a) Berechnen Sie die Divergenz $\mathrm{D}_\mu T^{\mu\nu} = 0$ des Energie-Impulstensors für ein ideales Fluid

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}, \quad u^\mu = (1,0,0,0). \tag{9}$$

Es dürfen dabei ohne Beweis die Christoffel-Symbole bzgl. der Koordinaten in der Standardform (1) mit $(x^\mu) = (t, r, \vartheta, \varphi)$ der FLRW-Metrik benutzt werden:

$$\begin{aligned}
&{\Gamma^0}_{ij} = -\frac{\dot{a}}{a} g_{ij} \quad \text{für} \quad i,j \in \{1,2,3\},\\
&{\Gamma^1}_{01} = {\Gamma^1}_{10} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad {\Gamma^1}_{11} = \frac{K r}{1-K r^2}, \quad {\Gamma^1}_{22} = -r(1-K r^2), \quad {\Gamma^1}_{33} = -r(1-K r^2)\sin^2\vartheta,\\
&{\Gamma^2}_{02} = {\Gamma^2}_{20} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad {\Gamma^2}_{12} = {\Gamma^2}_{21} = \frac{1}{r}, \quad {\Gamma^2}_{33} = -\cos\vartheta\sin\vartheta,\\
&{\Gamma^3}_{03} = {\Gamma^3}_{30} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad {\Gamma^3}_{13} = {\Gamma^3}_{31} = \frac{1}{r}, \quad {\Gamma^3}_{23} = {\Gamma^3}_{32} = \cot\vartheta.
\end{aligned} \tag{10}$$

Alle anderen Christoffelsymbole verschwinden. Außerdem gilt

$$\mathrm{D}_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial_\alpha T^{\alpha\beta} + {\Gamma^\alpha}_{\alpha\mu} T^{\mu\beta} + {\Gamma^\beta}_{\alpha\mu} T^{\alpha\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta}\right) + {\Gamma^\beta}_{\alpha\mu} T^{\alpha\mu}. \tag{11}$$

Zeigen Sie, daß sich daraus die Gleichung

$$\dot{\epsilon} + \frac{3\dot{a}(\epsilon + P)}{a} = 0 \tag{12}$$

ergibt.

(b) Was ergibt sich für nichtrelativistische Staubmaterie ($P = 0$) bzw. ultrarelativistische Materie (Strahlung, $\epsilon = 3P$) für die Funktion $\epsilon(a)$?

(c) Zeigen Sie, daß das Dreiervolumenelement des Raumschnitts $t = \text{const}$ durch

$$\mathrm{d}V^{(3)} = a^3 \frac{r^2}{\sqrt{1-Kr^2}} \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \tag{13}$$

bestimmt ist.

(d) Was folgt aus der lokalen Erhaltungsgleichung für die Energie $\mathrm{d}U = \epsilon \mathrm{d}V^{(3)}$?

(e) Wie läßt sich dieses Resultat in der Deutung des kosmologischen Substrats als eines Fluids im Hinblick auf die zeitliche Zustandsänderung interpretieren? Inwiefern ist dies mit der Interpretation des Energie-Impulstensors des Substrats im Sinne einer idealen Fluiddynamik konsistent?

Aufgabe 10: Zeitentwicklung des Skalenparameters für ein strahlungsdominiertes Universum
In der Vorlesung wurde gezeigt, daß eine der Friedmann-Gleichungen

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{\varkappa\epsilon}{3} \tag{14}$$

lautet. Im folgenden betrachten wir den Fall $\Lambda = 0$ und ein strahlendominiertes Universum, nehmen also die Zustandsgleichung $\epsilon = 3P$ an. Wie in Aufgabe 9 gezeigt wurde, gilt dann $\epsilon a^4 = \text{const}$

(a) Zeigen Sie, daß damit aus (14) die Differentialgleichung

$$(a\dot{a})^2 + Ka^2 = C_0^2, \quad C_0^2 = \frac{\varkappa\epsilon a^4}{3} = \text{const} \tag{15}$$

folgt.

(b) Lösen Sie die Gleichung für ein flaches Universum ($K = 0$). Wählen Sie dabei den Zeitnullpunkt so, daß $a(0) = 0$ ist.

(c) Lösen Sie die Gleichung auch für den Fall des geschlossenen ($K = +1$) und des offenen ($K = -1$) Universums (wieder mit der Anfangsbedingung $a(0) = 0$).

Hinweis: Dabei empfiehlt sich die Substitution eines Parameters η gemäß

$$a = C_0 \sin\eta \quad \text{für} \quad K = +1 \quad \text{bzw.} \quad a = C_0 \sinh\eta \quad \text{für} \quad K = -1. \tag{16}$$

Zum Schluß läßt sich dann eine geschlossene Form für $a(t)$ finden.

(d) Sizzieren Sie die Lösungen $a = a(t)$ und diskutieren Sie die physikalische Bedeutung der Tatsache, daß notwendigerweise zumindest für $t = 0$ die Metrik wegen $a(0) = 0$ singulär wird. Was ist besonders am geschlossenen Universum ($K = +1$)?

Aufgabe 11: Luminositätsabstand aus klassischer Elektrodynamik (Knobelaufgabe)

Wir betrachten im folgenden freie elektromagnetische Felder in der FLRW-Metrik, wobei wir davon ausgehen, daß diese hinreichend schwach sind, so daß wir die Rückwirkung des elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensors auf die Raumzeitstruktur vernachlässigen können („Testfeldnäherung“).

Die Wirkung des freien elektromagnetischen Feldes lautet (in Heaviside-Lorentz-Einheiten)

$$S = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right) \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} = \mathrm{D}_\mu A_\nu - \mathrm{D}_\nu A_\mu. \tag{17}$$

Dabei sind $g = \det(g_{\mu\nu})$ die Determinante der Metrik und D_μ die kovariante Ableitungen.

(a) Zeigen Sie durch Variation der Wirkung bzgl. $g_{\mu\nu}$, daß der Energie-Impuls-Tensor des em. Feldes durch

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu}{}_{\alpha} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \tag{18}$$

gegeben ist. Beachten Sie dabei, daß definitionsgemäß unter Variation der Wirkung

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g}\, T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \tag{19}$$

gilt.

(b) Betrachten Sie nun in der gewöhnlichen Minkowski-Raumzeit eine ebene elektromagnetische Welle

$$\vec{E} = A\vec{e}_x \cos[\omega(t-z)], \quad \vec{B} = A\vec{e}_y \cos[\omega(t-z)] \tag{20}$$

und zeigen Sie, daß das Zeitmittel des Energie-Impulstensors über eine Periode durch

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \left\langle T^{00} \right\rangle k^\mu k^\nu = \epsilon u^\mu u^\nu, \quad \left\langle T^{00} \right\rangle = \frac{A^2}{2}, \quad u^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \tag{21}$$

gegeben ist.

(c) Betrachten Sie nun die elektromagnetische Strahlung, die ein Objekt homogen und isotrop aussendet und von einem Beobachter bei $r \gg \lambda$ beobachtet wird. Dann kann man das em. Feld am Beobachtungspunkt als ebene Welle nähern. Begründen Sie aus dem Äquivalenzprinzip und der Betrachtung in Aufgabenteil (a), daß der Energie-Impuls-Tensor dort durch

$$T^{\mu\nu} = \epsilon(t,\chi) u^\mu u^\nu, \quad u^0 = 1, \quad u^\chi = \frac{1}{a(t)}, \quad u^\vartheta = u^\varphi = 0 \tag{22}$$

gegeben ist.

(d) Zeigen Sie, daß die allgemeinrelativistische Kontinuitätsgleichung $\mathrm{D}_\mu T^{\mu\nu} = 0$, die die lokale Energieerhaltung für em. Strahlung bedeutet, für (22) auf

$$\frac{1}{a(t)^3} \partial_t [a^4(t)\epsilon] + \frac{1}{S_K^2(\chi)} \partial_\chi [S_K^2(\chi)\epsilon] = 0 \tag{23}$$

führt[2].

[2]Für den Rest der Aufgabe ist die Verwendung eines Computer-Algebrasystems wie Mathematica oder Maple sinnvoll.

(e) Führen Sie nun statt t die konforme Zeit τ gemäß (2) ein sowie die Variable

$$\tilde{\epsilon} = a^4(t) S_K^2(\chi)\epsilon. \tag{24}$$

Zeigen Sie, daß dann (23) die einfache Form

$$\partial_\tau \tilde{\epsilon} + \partial_\chi \tilde{\epsilon} = 0 \tag{25}$$

annimmt und folglich Funktionen $\tilde{\epsilon}(\tau - \chi)$ entlang der Nullgeodäten $\tau - \chi = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ konstant sind.

(f) Zeigen Sie, daß weiter aus (22) und (24) folgt, daß die Luminosität durch

$$L = \frac{a^2(t_0) P_0}{4\pi a^4(t) S_K^2(\chi)} \tag{26}$$

gegeben ist. Dabei ist $P_0 = 4\pi a^2(t_0) S_K^2(\chi_0)\epsilon_0$ die gesamte am Ort der Emission (beim Radius χ_0) abgestrahlte Leistung (warum?). Drücken Sie (26) durch den Rotverschiebungsparameter aus und bestimmen Sie daraus den Zusammenhang zwischen Luminositätsabstand und Eigenabstand $a(t)r$.

(g) Wie kann man das Ergebnis heuristisch im naiven Photonenbild begründen?
