Die linearisierte Feldgleichungen der ART und Gravitationswellen

Die ART ist eine klassische, nichtlineare Feldtheorie zur Gravitation. Spezielle Beispiele sind die volle Lösung zur Gravitation einer statischen Kugel-sym. Massenverteilung, wie die Schwarzschild-Lsg im Aussenraum wie auch die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung der (kompakten) Sternen, wie auch später die Robertson-Walker-Metrik des expandierenden Universums. Diese Lösungen gelten auch für "starke" Felder, wo die Metrik $g_{\mu\nu}$ signifikant sich von der Minkowski-Metrik unterscheiden. Andererseits, für "schwache" Quellen oder für grosse Entfernungen im Aussenraum erwarten wir nahezu euklidische Geometrie. Überdies, in Analogie zur rel. Elektrodynamik, erwarten wir ebenfalls "einfache" rel. Wellengleichungen, die sich kausal, also mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten. Das Problem sind die (quadratischen) Nichtlinearitäten, die die ART so komplex darstellen, und die wir (per Annahme) eliminieren wollen.

Fassen wir kurz zusammen:

Energie-Impuls-Tensor "Quelle"

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad \text{- Einsteinsche Feldgleichung} \quad (1)$$

$$\text{Ricci-Tensor } R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\nu\mu}$$
$$\text{Krümmungsskalar } R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Alternativ können wir (1) auch schreiben als

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}\right) \quad \text{mit } T \equiv T^{\mu}{}_{\mu} \qquad (2)$$

Weiter gilt für den Riemannischen Krümmungstensor:

$$V^\alpha{}_{\|\beta\|\gamma} - V^\alpha{}_{\|\gamma\|\beta} = R^\alpha{}_{\mu\beta\gamma} V^\mu$$

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\gamma} = \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} + \underbrace{\Gamma^\alpha_{\gamma\nu} \Gamma^\nu_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \Gamma^\nu_{\gamma\mu}}_{\text{"Nicht-Linearitäten"}} \right) \qquad (3)$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\lambda_{\beta\sigma} \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} \right) \qquad (4)$$

Die Christoffel-Symbole sind gegeben über die Metrik

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right] = \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \qquad (5)$$

Auch gilt (vgl. Weinberg, oder auch Kap. 5) weiter durch Umrechnen

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} \right) + g_{\rho\lambda} \left(\Gamma^\rho_{\alpha\mu} \Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\rho_{\beta\mu} \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \right) \qquad (6)$$

Hier erkennt man bereits die "linearen" und "quadratischen" (nichtlin.) Abhängigkeiten des Krümmungstensors nach 2-ten Ableitungen nach der Metrik oder als Produkt von ersten Ableitungen der Metrik.

Für den Fall (als Annahme) kleiner Abweichungen vom Minkowski-Tensor

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{mit } \underline{|h_{\mu\nu}| << 1} \qquad (7)$$

wollen wir die Feldgleichungen systematisch nach der ersten (und später auch bis zur zweiten) Ordnung entwickeln. Es ist

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2), \quad \text{mit } h^{\mu\nu} \hat{=} \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta} \qquad (8)$$

← Minkowski-Tensor

da $\quad g^{\mu\nu}g_{\nu\kappa} = (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(\eta_{\nu\kappa} + h_{\nu\kappa}) = \delta^\mu_\kappa - h^\mu_\kappa + h^\mu_\kappa + h^{\mu\nu}h_{\nu\kappa} \approx \delta^\mu_\kappa$

Weiter ist für das Christoffel-Symbol (5)

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \overset{(5)}{=} \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left[g_{\rho\nu|\mu} + g_{\rho\mu|\nu} - g_{\mu\nu|\rho}\right]$$

$$\approx \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left[h_{\rho\nu,\mu} + h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu|\rho}\right] + O(h^2) \qquad (8)$$

← erste Ordnung

und für den Ricci-Tensor aus (3)

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$$

$$\overset{(3)}{=} \left(\frac{\partial\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \overbrace{O(h^2)}^{\Gamma\otimes\Gamma}\right)$$

$$\approx \Gamma^\lambda_{\mu\lambda|\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu|\lambda}$$

$$\overset{(8)}{=} \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left(h_{\rho\lambda|\mu|\nu} + \cancel{h_{\rho\mu|\lambda|\nu}} - h_{\mu\lambda|\rho|\nu}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left(h_{\rho\nu|\mu|\lambda} + \cancel{h_{\rho\mu|\nu|\lambda}} - h_{\mu\nu|\rho|\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(h^\lambda{}_{\lambda|\mu|\nu} - h^\rho{}_{\mu|\nu|\rho} - h^\lambda{}_{\nu|\mu|\lambda} + \underbrace{\eta^{\lambda\rho}h_{\mu\nu|\rho|\lambda}}\right), \qquad (9)$$

$$= \frac{1}{2}\left(h^\lambda{}_{\lambda|\mu|\nu} - h^\lambda{}_{\mu|\nu|\lambda} - h^\lambda{}_{\nu|\mu|\lambda} + \Box h_{\mu\nu}\right)$$

"Wellen-operator"

Aus den Feldgleichungen (2) in erster führender Ordnung h wird dann

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\Box h_{\mu\nu} + h^{\lambda}{}_{\lambda|\mu|\nu} - h^{\lambda}{}_{\mu|\nu|\lambda} - h^{\lambda}{}_{\nu|\lambda|\mu}\right)$$

$$= -\frac{8\pi G}{c^4}\left[T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)\right] \qquad (10)$$

Die kleinen "Größen" $h_{\mu\nu}$ haben ihre Ursachen in den Quellen $T_{\mu\nu}$, i.e. $T, T_{\mu\nu} \sim O(h)$, so daß wir den 2.ten Term der rechten Seite vernachlässigen dürfen, (11)

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\Box h_{\mu\nu} + h^{\lambda}{}_{\lambda|\mu|\nu} - h^{\lambda}{}_{\mu|\nu|\lambda} - h^{\lambda}{}_{\nu|\lambda|\mu}\right) \approx -\frac{8\pi G}{c^4}\left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T\eta_{\mu\nu}\right]$$

An dieser Stelle haben wir bislang nicht die "Freiheit" an geschickten Koordinaten ausgenutzt. Diese sind ja gemäß der ART ja "beliebig". Wir können (in der <u>entsprechenden</u> Größenordnung $O(h)$) Transformationen

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x) \quad , \text{mit} \left|\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right| \sim O(h) \ll 1 \qquad (12)$$

aussuchen, die ggf. den Differentialoperator auf der rechten Seite (erheblich) vereinfachen kann. Dies liegt dann eine geschickte "Eichung" dar.

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\kappa}} g^{\lambda\kappa} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\kappa}}\left(\eta^{\lambda\kappa} - h^{\lambda\kappa}\right)$$

$$= \left(\delta^{\mu}_{\lambda} + \frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right)\left(\delta^{\nu}_{\kappa} + \frac{\partial \varepsilon^{\nu}}{\partial x^{\kappa}}\right)\left(\eta^{\lambda\kappa} - h^{\lambda\kappa}\right) \qquad (13)$$

$$\hat{=}\ \eta^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu}$$

Damit wird $\frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\lambda} \delta^\nu_\kappa \eta^{\lambda\kappa} = \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\lambda} \eta^{\lambda\nu} = \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x_\nu}$

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x_\mu} \qquad (14a)$$

bzw. in derselben führenden Ordnung mit Verschieben der oberen und unteren Indizes mit der Minkowski-Metrik ($\varepsilon_\mu = \eta_{\mu\alpha} \varepsilon^\alpha$, $x_\nu = \eta_{\nu\beta} x^\beta, \ldots$)

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu} \qquad (14b)$$

$$= h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu|\nu} - \varepsilon_{\nu|\mu}$$

Diese Transformation erinnert an die aus der Elektrodynamik analoge <u>Eichtransformation</u> $A^\alpha \to A'^\alpha = A^\alpha + \partial^\alpha \chi$. Damit ließ sich durch eine geeignete Wahl des skalaren Feldes $\chi(x)$ sich die Eichbedingung $A^\alpha{}_{|\alpha}$ zu "erzwingen", sodaß die Maxwell-Gleichungen $F^{\beta\alpha}{}_{|\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$ zu $\Box A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$ umschrieben lässt, i.e. die bekannte Wellengleichung des elektromagnetischen Viererpotentials.

In Analogie zur Elektrodynamik wird die Transformation des "Potentials" $g_{\mu\nu}$ (bzw. $h_{\mu\nu}$) als <u>Eichtransformation</u> der Koordinaten bezeichnet.

Die Koordinatentransformation (12) ändert nicht die Form der Feldgleichungen (14), solange $\varepsilon^\mu(x)$ hinreichend klein ist. Insbesondere können wir ein sog. <u>harmonisches</u> Koordinatensystem wählen, in dem

$$g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \overset{!}{=} 0 \qquad (15)$$

gilt. Diese zusätzliche Bedingung wird auch als <u>Weyl- oder auch Hilbert</u>eichung bezeichnet.

Diese vorteilhafte "Eichung" bedeutet erst einmal:

$$0 = g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \eta^{\lambda\varrho} (h_{\varrho\nu|\mu} + h_{\varrho\mu|\nu} - h_{\mu\nu|\varrho}) \quad \Big| \eta_{\kappa\lambda}^{\kappa \leftrightarrow \lambda} \Rightarrow$$

$$0 \underset{\text{führende Ordnung}}{\cong} \eta^{\mu\nu} (h_{\lambda\nu|\mu} + h_{\lambda\mu|\nu} - h_{\mu\nu|\lambda})$$

$$= \eta^{\mu\nu} (h_{\nu\lambda|\mu} + h_{\mu\lambda|\nu} - h_{\nu\mu|\lambda})$$

$$= h^{\mu}{}_{\lambda|\mu} + h^{\nu}{}_{\lambda|\nu} - h^{\mu}{}_{\mu|\lambda} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{2 h^{\mu}{}_{\nu|\mu} = h^{\mu}{}_{\mu|\nu}} \tag{16}$$

Physikalische Größen wie z. B. der invariante Abstand dürfen nicht von der Wahl der Koordinaten und damit von der Eichung abhängen.

<u>Zwischeneinschub</u>: Können wir diese Eichung (15) bzw. (16) durch Wahl einer Koordinatentrafo (12) bzw. (14) immer erreichen?

$$(14) \Rightarrow \quad h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu|\nu} - \varepsilon_{\nu|\mu}$$

Damit ist

$$2 h'^{\mu}{}_{\nu|\mu} - h'^{\mu}{}_{\mu|\nu} = 2 h^{\mu}{}_{\nu|\mu} - h^{\mu}{}_{\mu|\nu} - 2(\varepsilon^{\mu}{}_{|\nu|\mu} + \varepsilon_{\nu}{}^{|\mu}{}_{|\mu})$$
$$+ 2 \varepsilon^{\mu}{}_{|\mu|\nu}$$

$$= 2 h^{\mu}{}_{\nu|\mu} - h^{\mu}{}_{\mu|\nu} - 2 \varepsilon_{\nu}{}^{|\mu}{}_{|\mu} \overset{!}{=} 0$$

Mit $\varepsilon_{\nu}{}^{|\mu}{}_{|\mu} = \Box \varepsilon_\nu = 2 h^{\mu}{}_{\nu|\mu} - h^{\mu}{}_{\mu|\nu}$ können wir eine geschickte Lösung dieser <u>(inhomogenen)</u> Wellengleichung eine entsprechende Koordinatentransformation (12) finden, so daß in den gestrichenen (neuen) Koordinaten eben dann die Eichbedingung (16) erfüllt sind.

Damit ist die Erreichbarkeit gezeigt. Freie Lösungen der Wellengleichung geben dann noch zusätzliche Freiheiten.

Warum ist diese harmonische Eichung so populär?

Betrachten wir dazu die linearisierte Einsteingleichung (11) deren linke Seite:

$$\Box h_{\mu\nu} + h^{\lambda}{}_{\lambda|\mu|\nu} - h^{\lambda}{}_{\mu|\nu|\lambda} - h^{\lambda}{}_{\nu|\lambda|\mu} =$$

Eichbedingung (16) $\longrightarrow$

$$h^{\lambda}{}_{\mu|\lambda|\nu} + h^{\lambda}{}_{\nu|\lambda|\mu}$$

$h^{\lambda}{}_{\lambda|\mu|\nu}$
$= \frac{1}{2}\left(h^{\lambda}{}_{\lambda|\mu|\nu} + h^{\lambda}{}_{\lambda|\nu|\mu}\right)$

$$= \Box h_{\mu\nu}$$

und somit wie in der Elektrodynamik die bekannte (harmonische) Wellengleichung

$$\boxed{\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\eta_{\mu\nu}\right)} \qquad (17)$$

mit der gewählten Eichfixierung

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial h^{\mu}{}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \qquad (16)$$

Die Lösung der Wellengleichung (17) sind die bekannten retardierten Lienard-Wiechert-"Potentiale":

Retardierung

ret. Greensfunktion
$G(x,t)$
$= \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}\delta(|\vec{x}|-ct)$

$$h_{\mu\nu}(x) = -\frac{4G}{c^4}\int d^3r' \frac{S_{\mu\nu}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (18)$$

mit $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T\eta_{\mu\nu}$

Wellen breiten sich aus mit Lichtgeschwindigkeit!

(Im Kapitel 11 von Goenner wird auch gezeigt, daß die Lsg (18) auch die Eichfixierung (16) i.d.T. erfüllt...)

Zur Vertiefung: <u>statischer, nichtrelativistischer Grenzfall</u> (vgl. Sexl/Urbantke, S. 76)

Ausgangspunkt ist die linearisierte ART-Bewegungsgleichung (17).
Wir nehmen an, daß $T_{\mu\nu}$ statisch sei und nur T_{00} groß, i.e. reine gravierende Materiedichte, i.e.

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \cancel{0} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad T = T^\mu{}_\mu \cong \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \rho c^2$$

Damit wird aus (17)

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left(\rho c^2 \delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0} - \frac{1}{2}\rho c^2 (\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0} - \delta_{\mu 1}\delta_{\nu 1} - \delta_{\mu 2}\delta_{\nu 2} - \delta_{\mu 3}\delta_{\nu 3})\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Box h_{00} = -\frac{8\pi G}{c^2}\rho$$

$$\left.\begin{array}{l} \Box h_{11} = \Box h_{22} = \Box h_{33} = -\frac{8\pi G}{c^2}\rho \\ \Box h_{0i} = \Box \underset{i \neq j}{h_{ij}} = 0 \quad \uparrow \text{keine Quelle} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} |\vec{r}| \to \infty \\ \text{soll} \\ h \text{ gegen } 0 \text{ gehen} \end{array}\right\} \begin{array}{l} h_{11} = h_{22} = h_{33} \\ h_{ij} = h_{0i} = 0 \end{array}$$

Im statischen Grenzfall seien alle $h_{\mu\nu}$ zeitunabhängig (auch die Quellen), damit $\Box \to (-)\Delta$

$$\Delta h_{00} = \frac{8\pi G}{c^2}\rho \overset{\text{Newton}}{\approx} \Delta\left(2\frac{\Phi_{Grav}(\vec{r})}{c^2}\right) \Rightarrow h_{00} \mathrel{\hat{=}} \frac{2\Phi_{Grav}(\vec{r})}{c^2}$$

und analog $h_{ij} \mathrel{\hat{=}} +\frac{2\Phi_{Grav}(\vec{r})}{c^2}\delta_{ij}$

Damit folgt die bekannte Metrik,

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 + \frac{2\Phi_{Grav}(\vec{r})}{c^2}\right) - d\vec{r}^{\,2}\left(1 - 2\frac{\Phi_{Grav}(\vec{r})}{c^2}\right)$$

als Näherung der Schwarzschild-Lösung.

Ein expliziter Check der Eichbedingung (16) ist mittels

Diagonal

$$h^{\mu}{}_{\nu} \cong \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} \mathrel{\hat{=}} 2\,\frac{\phi_{Grav}(\vec{r})}{c^2}\left(\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0} - \delta_{\mu 1}\delta_{\nu 1} - \delta_{\mu 2}\delta_{\nu 2} - \delta_{\mu 3}\delta_{\nu 3}\right), \quad h^{\mu}{}_{\mu} = (-4)\frac{\phi_{Grav}}{c^2}$$

$$\nu = 0: \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h^{\mu}{}_{0} = \frac{\partial}{\partial x^{0}}\left(2\,\frac{\phi_{Grav}}{c^2}\right) = 0 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x^{0}}(\ldots)$$

$$\nu = 1: \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h^{\mu}{}_{1} = \frac{\partial}{\partial x^{1}} h^{1}{}_{1} = \frac{\partial}{\partial x^{1}}\left(-2\,\frac{\phi_{Grav}(\vec{r})}{c^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial h^{\mu}{}_{\mu}}{\partial x^{1}} \quad \checkmark$$

$\nu = 2, 3$ analog ✓

gegeben.

Gravitationswellen

Wie sehen freie gravitative Wellen aus?
In Analogie zu freien elektromagnetischen Wellen

$$A^\alpha = e^\alpha \exp(-i k_\beta x^\beta) + c.c. = e^\alpha \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) + c.c.$$

mit $k_\beta k^\beta = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = c^2 k^2$, $e^\alpha = (0, \vec{e})$, $\vec{e} \cdot \vec{k} = 0$
(aufgrund der Eichfreiheit rein transversale Amplituden)
und zwei linearen Polarisationen erwarten wir aufgrund der formalen Ähnlichkeit dieselben Lösungen.
Aus (16) und (17) haben wir

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \quad \leftarrow \text{„frei", ohne Materie} \qquad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} h^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial h^\mu{}_\mu}{\partial x^\nu} \quad \leftarrow \text{Eichbedingung} \qquad (16)$$

Wir machen den Ansatz

$$h_{\mu\nu} = \underbrace{e_{\mu\nu}}_{\text{symmetrisch}} \exp(-i k_\lambda x^\lambda) + c.c. \qquad (20)$$

Aufgrund von (19) folgt sofort

$$\Box = \eta^{\lambda\kappa} \partial_\lambda \partial_\kappa \xrightarrow{(20)} \eta^{\lambda\kappa} k_\lambda k_\kappa = k^\lambda k_\lambda = 0 \Leftrightarrow k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

also freie Wellen mit Ausbreitungsgeschwindigkeit c.
Die Eichbedingung (16) ergibt

$$2 k_\mu \eta^{\mu\rho} e_{\rho\nu} = k_\nu \eta^{\mu\rho} e_{\rho\mu} \qquad (21)$$

und ergibt signifikante Einschränkungen für Amplitude $e_{\mu\nu}$.

Betrachten wir dazu einfachshalber eine Welle in $x^3 \equiv z$ – Richtung: (10)

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}\left[ik(x^3 - ct)\right] + c.c. \quad ; \; k_1 = k_2 = 0 \qquad (21)$$

$$k_0 = -k_3 = k = \frac{\omega}{c}$$

Aus (21) folgen die Relation für $\nu = 0,1,2,3$

$\nu = 0$:
$$2k^3 e_{00} + 2k\, e_{30} = k\,(e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33})$$

$$e_{00} + e_{30} = (e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33})/2$$

$\nu = 1$: $\quad e_{01} + e_{31} = 0$ (22)

$\nu = 2$: $\quad e_{02} + e_{32} = 0$

$\nu = 3$: $\quad e_{03} + e_{33} = -(e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33})/2$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ und diese vier Eichbedingungen kann der Polarisationstensor $e_{\mu\nu}$ durch (zunächst) sechs Komponenten festgelegt werden:

$$e_{00},\; e_{11},\; e_{33},\; e_{12},\; e_{13},\; e_{23}$$

und $\quad e_{01} = -e_{31}, \; e_{02} = -e_{32}, \; e_{03} = -\dfrac{e_{00} + e_{33}}{2}, \; e_{11} = -e_{22}$

Wir können noch zusätzliche Eichtransformationen, die für freie Wellenlösungen möglich sind (vgl. unten Bemerkungen auf S. 6 unten):

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$$

$$\hookrightarrow \quad h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu|\nu} - \varepsilon_{\nu|\mu}$$

ergibt dann die Eichfixierung (16). Zusätzlich kann aber ε^μ selber noch eine freie Lösung sein:

$$\varepsilon^\mu(x) = \delta^\mu \exp(-ik_\lambda x^\lambda) + c.c. \qquad (23)$$

$$\Rightarrow \tilde{h}_{\mu\nu} \equiv -\varepsilon_{\mu|\nu} - \varepsilon_{\nu|\mu} = (ik_\nu\, \delta_\mu \exp(-ik_\lambda x^\lambda) + c.c.) + (ik_\mu\, \delta_\nu \exp() + c.c.)$$

erfüllt automatisch die Eichfixierung (16) $\; 2\tilde{h}^\mu{}_{\nu|\mu} = \tilde{h}^\mu{}_{\mu|\nu}$,

$$\overbrace{\text{denn } 2\left(k^\mu k_\nu \delta_\mu + k^\mu k_\mu \delta_\nu\right)}^{\text{linke Seite}} = \overbrace{(k^\mu \delta_\mu) k_\nu + (k^\mu \delta_\mu) k_\nu}^{\text{rechte Seite}}$$

ist explizit erfüllt, wenn $k^\mu k_\mu = 0$, also freie Wellen.

Damit können wir also die Polarisation weiter "umeichen", ohne die Physik zu verändern

$$e_{\mu\nu} \Rightarrow e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + ik_\mu \delta_\nu + ik_\nu \delta_\mu$$

mit vier beliebigen Umeichparameter δ_ν mit nun o.B.d.A.: $k_1 = k_2 = 0$, $k_0 = -k_3 = k = \frac{\omega}{c}$

$$\begin{aligned}
e'_{11} &= e_{11} \\
e'_{12} &= e_{12} \\
e'_{13} &= e_{13} - ik\delta_1 \\
e'_{23} &= e_{23} - ik\delta_2 \\
e'_{33} &= e_{33} - 2ik\delta_3 \\
e'_{00} &= e_{00} + 2ik\delta_0
\end{aligned}$$

Die neue Lösung $e'_{\mu\nu}$ ist physikalisch äquivalent geblieben mit $e_{\mu\nu}$, da wir nur eine Koordinatentransformation unter Beibehaltung der Eichfixierung vorgenommen haben. Durch geeignete Wahl der δ_μ können wir die Amplituden $e'_{13} = e'_{23} = e'_{33} = e'_{00} \equiv 0$ zu Null machen. Es verbleiben nur zwei unabhängige Amplituden

$$(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp(ik(x^3 - ct)) + c.c. \qquad (e_{22} = -e_{11}) \tag{24}$$

Dabei haben wir den Strich wieder weggelassen.

Diese Lösung ist zu vergleichen mit den freien Lösungen in der elektromag. Theorie.

zur Vertiefung: Helizität, Gravitonen

Drehung um die $x^3 \equiv z$-Achse: $\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

bedeutet

$$e'_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \, e_{\rho\sigma}$$

eigentliche phys. Basis

$\Downarrow$

Polarisation

$\downarrow$

und damit für die sechs Amplituden

$$e_{00},\ e_{33},\ e_{33},\ e_{12},\ e_{13},\ e_{23} \Leftrightarrow e_{00},\ e_{33},\ f_\pm = e_{13} \pm i e_{23},\ e_\pm = e_{11} \pm e_{12}$$

in... $e'_{00} = e_{00}$, $e'_{33} = e_{33}$, $\bar{f}'_\pm = \exp(\pm i\varphi) f_\pm$, $e'_\pm = \exp(\pm 2i\varphi) e_\pm$

Das Verhalten $\psi' = \exp(iH\varphi)\psi$ bei Drehung um den Wellenvektor $\vec{k}$ bezeichnet man als Helizität H.
In einer quantisierten Theorie wird $h_{\mu\nu}$ zur Wellenfunktion der sog. Gravitonen. Obiges Trafo-Verhalten impliziert einen Drehimpuls der Gravitonen mit der Projektion $H\hbar$ auf die Impulsrichtung, i.e. $\exp(im\varphi)$ wobei m die Projektion des Bahndrehimpulses auf die $x^3 = z$-Achse darstellt. $H = 0, \pm 1, \pm 2$ zeigen, daß die Gravitonen mit Spin 2 sind.
$H = \pm 2$ bezeichnet (siehe auch S. 11) die physikalische Polarisation, oder einen phys. Zustand. Im Teilchenbild ist der Spinvektor parallel oder antiparallel zum Impuls ist.
Aufgrund von $k_\beta k^\beta = 0$ ist dann für das Teilchen mit $E \hat{=} \hbar\omega$ und $p = \hbar k$

$$0 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \Rightarrow E^2 = c^2 p^2 \hat{=} m^2 c^4 + c^2 p^2,$$

i.e. das Graviton ist masselos.
Die ART ist eine Eichfeldtheorie, daher masselose Quanten.

freies Teilchen im Feld einer Gravitationswelle

$$h_{\mu\nu}(x^3, ct) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\left[ik(x^3 - ct)\right] + c.c \qquad (24)$$

und der zeitabhängigen Metrik

$$ds^2 = \left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^3, t)\right) dx^\mu dx^\nu \qquad (25)$$

Ein Teilchen bewegt sich auf der Geodäte $x^\sigma(\tau)$:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Aus (8) ist

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \cong \frac{\eta^{\sigma\lambda}}{2}\left(\frac{\partial h_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right)$$

und damit

$$\Gamma^i_{00} \overset{\sigma = i}{\underset{\lambda = i}{\Rightarrow}} -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{0i}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{0i}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}\right) \equiv 0$$

- Ein ruhendes Teilchen $\left(\dot{x}^i(0) = \frac{dx^i}{d\tau} = 0\right)$ verbleibt in Ruhe: $\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{00} (\dot{x}^0)^2 = 0$.

Die Welle „erscheint" die Koordinaten eines Teilchen nicht zu „verändern".

Für den Krümmungstensor gilt (vgl (6)):

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} \approx \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\mu|\beta\nu} - h_{\beta\mu|\alpha\nu} - h_{\alpha\nu|\beta\mu} + h_{\beta\nu|\alpha\mu}\right).$$

Da h vier Komponenten ungleich Null besitzt, finden wir z. B.

$$\underset{m,n=1,2}{R_{m0n0}} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 h_{mn}}{c^2 dt^2} - 0 - 0 - 0\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{mn}}{c^2 dt^2} \neq 0$$

- Der Raum ist also lokal „gekrümmt"!

Bleibt das Teilchen wirklich in "Ruhe"? In den gewählten Koordinaten offensichtlich ja. Betrachten wir aber den <u>physikalischen</u> Abstand von "ruhenden" Teilchen mit

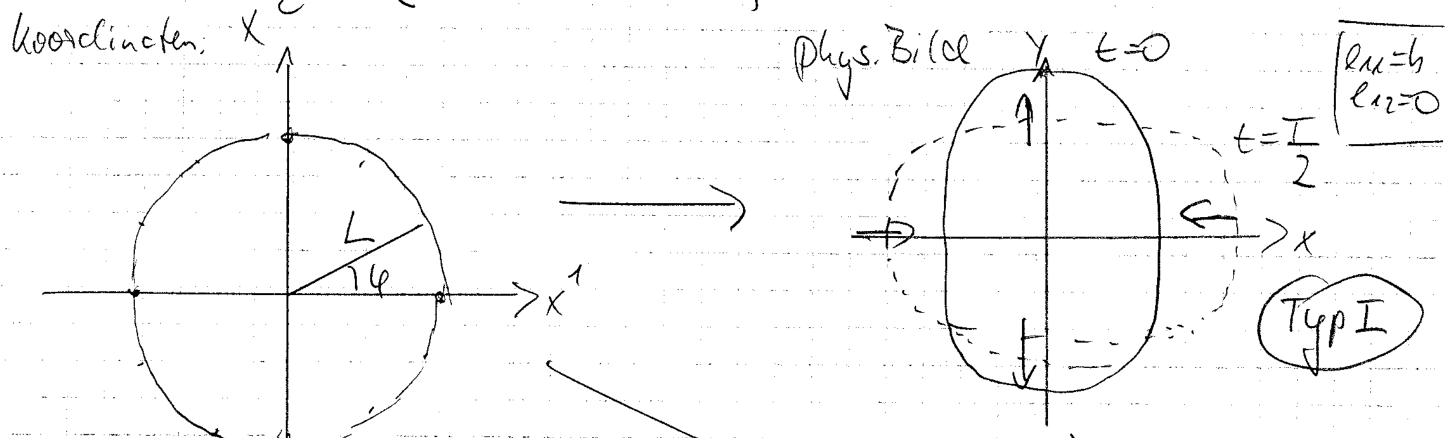
$$x_p^1 = L\cos\varphi\,,\quad x_p^2 = L\sin\varphi\,,\quad x_p^3 \hat{=} z = 0 \qquad \text{(transversale Ebene)}$$

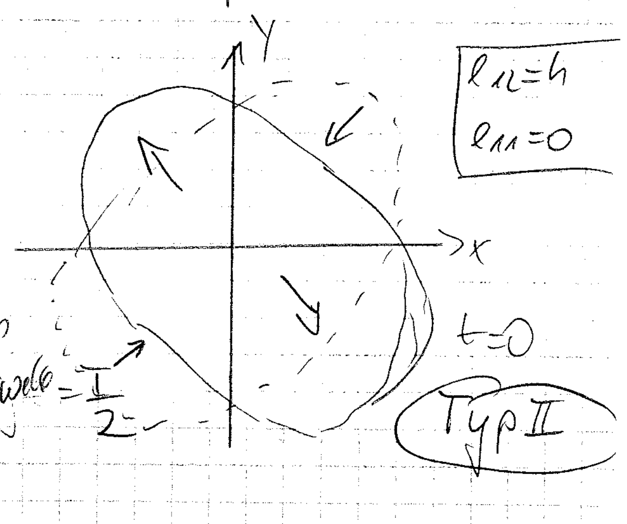
Diese Punkte (Teilchen) liegen auf einem transversalen Kreis (für alle Koordinatenzeit t)

Der Abstand ← Raum-Abstand zum Ursprung (vgl. (25)) ergibt sich zu:

$$\rho^2 \Big(\underset{\uparrow\, dt=0}{\hat{=}} -ds^2\Big) = \left[\delta_{mn} - h_{mn}(t)\right] dx^m dx^n$$

$$\Rightarrow \quad \rho^2 = L^2 \begin{cases} \Big[1 - 2h \overbrace{\cos(2\varphi)}^{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} \cos\omega t\Big] & (e_{11} = h,\ e_{12} = 0) \\ \Big[1 - 2h \overbrace{\sin 2\varphi}^{2\sin\varphi\cos\varphi} \cos\omega t\Big] & (e_{12} = h,\ e_{11} = 0) \end{cases} \qquad (26)$$





Die zwei unabh. Polarisationsrichtungen bilden miteinander einen Winkel von $\frac{\pi}{4}$ (in der E-Dyn. $\frac{\pi}{2}$). Diese Auslenkungen bedeuten ein oszillierendes <u>Quadrupolmoment</u> (einer verursachenden, zappelnden Massenverl. ($\sim I_{mn}$)). Umgekehrt regt eine Gravitationswelle Quadrupolschwingungen (→ LIGO) an.

Doppelstern-System (vgl. später) ι Boo:

$$\frac{|\rho - L|}{L} \sim 10^{-20}$$

Energie-Impuls-Komplex der Gravitations(strahlung)

(vgl. Fliessbach Kap 34, Kap 22, Ryder/Rebhan Kap 10.11, Weinberg 10.3)

Für schwache Gravitationsfelder bzw. Strahlung im Aussenraum

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{mit } |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

denken wir uns den Ricci-Tensor (und das Riemannsche Krümmungsskalar) in weitere Ordnungen von h:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \tag{27}$$

$$\left(R\frac{g_{\mu\nu}}{2}\right) = \left(R\frac{g_{\mu\nu}}{2}\right)^{(1)} + \left(R\frac{g_{\mu\nu}}{2}\right)^{(2)} + \dots$$

Die erste Ordnung $\sim O(h)$ ergab dann die linearisierten Feldgleichungen (11). Wozu die zweite Ordnung? Wir können diese (zunächst formal) als die Feldenergie-Impulstensor interpretieren:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{R^{(1)}}{2}\eta_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{11}$$

$$R_{\mu\nu}^{(2)} - \left(R\frac{g_{\mu\nu}}{2}\right)^{(2)} \hat{=} \frac{8\pi G}{c^4} t_{\mu\nu} \tag{28}$$

und damit als verbesserte Feldgleichung bis Ordnung $\sim O(h^2)$

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{R^{(1)}}{2}\eta_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \underbrace{(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu})}_{T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\text{Materie})} + t_{\mu\nu}^{(\text{Feld})}} \tag{11'}$$

Der Term $\left(-\frac{8\pi G}{c^4}\right)t_{\mu\nu}$ würde dann die Selbstwechselwirkung des Feldgleichung (vgl. Rebhan) effektiv mitberücksichtigen. Die sind natürlich quadratisch klein ... und zu vernachlässigen. Aber: Der formale Ausflug lehrt uns die (effektive) Form des möglichen Energie-Impuls-Tensors des Gravitationsfeldes in führender Ordnung – eine sehr intuitive Sichtweise.

Man kann nun zeigen bzw. argumentieren, dass bis $O(h^2)$ auch der effektive, zusammenfassende Energie-Impuls-Tensor (vgl. Anhang (16a))

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = \partial^\mu \left(T^{mat}_{\mu\nu} + t^{grav}_{\mu\nu} \right) = 0 \quad \text{bis } O(h^2) \tag{29}$$

Energie-Impuls-Tensor erhält, i.e. es gilt bis $O(h^2)$ Energieerhaltung. Das ist wichtig, um später Energieargumente bei der Gravitationsstrahlung der rotierenden Doppel-Sterne verwenden zu dürfen.

Für den Aussenraum, wo $T^{mat}_{\mu\nu} \equiv 0$, gilt ja

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = 0 \quad \text{bzw} \quad G^{(1)}_{\mu\nu} = 0 \quad \text{und} \quad R = g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}, \quad g^{\rho\sigma} = \eta^{\rho\sigma} - h^{\rho\sigma} \tag{30}$$

Dann ist

$$t^{grav}_{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} \Big[\underbrace{2 \overset{O(h^2)}{R^{(2)}_{\mu\nu}} - \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \overset{O(h^2)}{R^{(2)}_{\rho\sigma}} + \eta_{\mu\nu} \overset{O(h)}{h^{\rho\sigma}} \overset{O(h)}{R^{(1)}_{\rho\sigma}} - \overset{O(h)}{h_{\mu\nu}} \eta^{\rho\sigma} \overset{O(h)}{R^{(1)}_{\rho\sigma}}}_{2\left(R^{(2)}_{\mu\nu} - \left(R \frac{g_{\mu\nu}}{2}\right)^{(2)}\right)} \Big]$$

$$= \frac{c^4}{16\pi G} \left[2 R^{(2)}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} R^{(2)}_{\sigma\rho} \right] \tag{31}$$

Der Ricci-Tensor $R^{(2)}_{\mu\nu}$

$$R^{(2)}_{\mu\nu} = \left(g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \right)^{(2)} = \eta^{\lambda\nu} R^{(2)}_{\lambda\mu\nu\kappa} - h^{\lambda\nu} R^{(1)}_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad ,$$

wobei (vgl. (6))

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) \leftarrow O(h)$$

$$+ g_{\eta\sigma} \left(\Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\kappa\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \right) \quad , \leftarrow O(h^2) \tag{6}$$

da $(5),(18)$

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \to \Gamma^{\sigma\,(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial h^\sigma{}_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h^\sigma{}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right] \leftarrow O(h)$$

wird

Anhang

Pseudoeuklidische Energieerhaltung bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$

ART: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

Ordnung: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$

$$\underbrace{\frac{8\pi G}{c^4} |T_{\mu\nu}|}_{\text{schwache Quelle}} \sim \mathcal{O}(h) \ll 1$$

Dievergenzfrei:

$$D^\mu G_{\mu\nu} = 0, \quad D^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

$$D = \underbrace{\partial^\mu}_{\text{führende Ordnung}} + \underbrace{\Gamma \otimes}_{\mathcal{O}(h)}$$

Zerlege: $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(1)} + \underbrace{\Delta G_{\mu\nu}^{(2,3,\dots)}}_{\mathcal{O}(h^2 + \dots)}$

führende Ordnung:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad ; \quad \sim \mathcal{O}(h) \quad ; \quad (*)$$

$$D^\mu G_{\mu\nu} = (\partial^\mu + \Gamma\otimes)(G_{\mu\nu}^{(1)} + \Delta G_{\mu\nu}^{(2,\dots)}) = \frac{8\pi G}{c^4}(D^\mu T_{\mu\nu})$$

$$= \frac{8\pi G}{c^4}(\partial^\mu T_{\mu\nu} + \Gamma \otimes T_{\mu\nu})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\partial^\mu G_{\mu\nu}^{(1)}}_{\equiv 0} = \frac{8\pi G}{c^4}\Big(\underbrace{\partial^\mu T_{\mu\nu}}_{= 0 \text{ in Ordnung } h \text{ aus } (*)} + \underbrace{\overset{\mathcal{O}(h)}{\Gamma} \otimes \underbrace{\left(T_{\mu\nu} - \frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(1)}\right)}_{\overset{!}{\equiv} 0 \text{ wegen } (*) \text{ exakt}}\Big) + \partial^\mu\left(\frac{c^4}{8\pi G}\Delta G_{\mu\nu}^{(2)}\right)}$$

(weil auch führend und identisch in Ordnung h.)

Damit ist auch

$$\partial^\mu \left(T_{\mu\nu} - \frac{c^4}{8\pi G} \Delta G_{\mu\nu}^{(2)} \right) = 0 \qquad (**)$$

gilt auch (wenigstens) bis einschliesslich Ordnung $O(h^2)$.

Damit gilt

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{c^4}{8\pi G} \Delta G_{\mu\nu}^{(2)} = T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}^{Grav}$$

$$\text{mit } t_{\mu\nu}^{Grav} = \left(-\frac{c^4}{8\pi G}\right) \Delta G_{\mu\nu}^{(2)} \qquad (***)$$

$t_{\mu\nu}^{Grav}$ ist dann der "freie" Energie-Impulstensor $O(h^2)$ des Gravitationsfeldes in führender, nichttrivialer Ordnung $O(h^2)$. Höhere Terme sind dann nicht berücksichtigt.

Aufgrund (**) gilt im pseudo-euklidischen Sinne Energieerhaltung bis einschliesslich $O(h^2)$.
Damit gelten eben auch unsere Energieargumente bei der Abstrahlung von gravitativer Abstrahlung in Form von Gravitationswellen bis $O(h^2)$.

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = -\frac{h^{\lambda\nu}}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 h_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{\partial h^\nu{}_\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h^\nu{}_\sigma}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h^\nu{}_\nu}{\partial x^\sigma}\right]\left[\frac{\partial h^\sigma{}_\mu}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial h^\sigma{}_\kappa}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\kappa}}{\partial x_\sigma}\right] \qquad (32)$$

$\eta^{\lambda\nu}\eta_{\eta\sigma}\Gamma^\eta_{\nu\lambda}$ $\qquad$ $\Gamma^\sigma_{\mu\kappa}$

$$-\frac{1}{4}\left[\frac{\partial h_{\sigma\kappa}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial h_{\sigma\lambda}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial h_{\lambda\kappa}}{\partial x^\sigma}\right]\left[\frac{\partial h^\sigma{}_\mu}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial h^{\sigma\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h^\lambda{}_\mu}{\partial x_\sigma}\right]$$

$\eta_{\eta\sigma}\Gamma^\eta_{\kappa\lambda}$ $\qquad$ $\Leftrightarrow \eta^{\lambda\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$

Aufgrund der Eichbedingung (16): $2h^\nu{}_{\sigma|\nu} = h^\nu{}_{\nu|\sigma}$ verschwindet die erste Klammer $(\eta^{\lambda\nu}\eta_{\eta\nu}\Gamma^\eta_{\nu\lambda})$, i.e. auch die Bedingung (15) $\eta^{\lambda\nu}\Gamma^\eta_{\nu\lambda} \equiv 0$.
Die anderen Terme sind quadratisch in h, typisch für einen Energie-Impulstensor.
Für eine ebene Gravitationswelle, i.e. (20), $h_{\mu\nu} \hat{=} [e_{\mu\nu}\exp(-ik_\lambda x^\lambda) + c.c.]$, entstehen Terme ohne Oszillation oder der Phase $\exp(\pm i2k_\lambda x^\lambda)$.
Eine zeitliche Mittelung lassen nur die koordinatenunabhängige Terme überleben: $[\ ][\ ] \hat{=} 2\mathrm{Re}(e^* \cdot e)$
Insgesamt wird aus (25) mit $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\dots) = -ik_\lambda(\dots)$

Zeitmittel $\langle R_{\mu\nu}^{(2)}\rangle = \mathrm{Re}\left[e^{\lambda\nu *}\left[k_\mu k_\nu e_{\lambda\nu} + k_\lambda k_\nu e_{\mu\kappa} - k_\lambda k_\kappa e_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu e_{\lambda\kappa}\right]\right]$

$$-\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\left[k_\lambda e_{\sigma\kappa} + k_\kappa e_{\sigma\lambda} - k_\sigma e_{\lambda\kappa}\right]^*\left[k^\lambda e^\sigma{}_\mu + k_\mu e^{\sigma\lambda} - k^\sigma e^\lambda{}_\mu\right]\right]$$

Aufgrund der Eichbedingung (21) $2k_\mu e^{\mu\nu} = k^\nu e^\lambda{}_\lambda$ lässt sich $\langle R_{\mu\nu}^{(2)}\rangle$ weiter vereinfachen,
z.B. $e^{\lambda\nu *}k_\kappa k_\lambda e_{\mu\nu} = \frac{1}{2}k^\nu (e^\lambda{}_\lambda)^* k_\kappa e_{\mu\nu} = \frac{1}{4}k_\mu k_\kappa |e^\lambda{}_\lambda|^2$

Unter Beachtung von $k^\lambda k_\lambda = 0$, i.e. die Dispersionsrelation der Gravitationswellen, wird (16)

$$\langle R_{\mu\kappa}^{(2)} \rangle = \frac{k_\mu k_\kappa}{2} \left(e^{\lambda\nu *} e_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} |e^\lambda_\lambda|^2 \right) \tag{33}$$

(Note: In (34.22) in Fliessbach ist hier ein Fehler. Es fehlt ein Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)$
(26) stimmt mit Weinberg (10.3.4) überein. Von den 13 Termen sind 3 identisch Null aufgrund der Massenrelation, 2 Terme geben ersten Term der (33), 8 Terme geben den zweiten Term in (33). Mit etwas Übung sieht man das...)

Aus (31) lautet der 2-te Term der $t_{\mu\nu}^{grav}$:

$$\left(t_{\mu\nu}^{grav}\right)_{2\text{-ter Term}} \sim (-)\, \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} R_{\rho\sigma}^{(2)}$$

$$\overset{(26)}{\sim} (-)\, \eta_{\mu\nu} \underbrace{\left(\eta^{\sigma\rho} k_\sigma k_\rho\right)}_{k^\rho k_\rho \equiv 0} \frac{1}{2} (\quad) \equiv 0$$

und damit es bleibt der 1-te Term

$$t_{\mu\nu}^{grav} = \frac{c^4}{16\pi G} 2 R_{\mu\nu}^{(2)} \overset{(33)}{=} \frac{c^4}{16\pi G} k_\mu k_\nu \left(e^{\lambda\kappa *} e_{\lambda\kappa} - \frac{1}{2} |e^\lambda_\lambda|^2 \right) \tag{34}$$

Speziell für die Welle (24) in z-Richtung (z.B. $e^\lambda{}_\lambda = 0$):

$$t_{\mu\nu}^{grav} = \frac{c^4}{8\pi G} k_\mu k_\nu \left(|e_{11}|^2 + |e_{12}|^2 \right) \geq 0 \quad (!) \tag{35}$$

(Note: (34) und (35) stimmen wieder bei Fliessbach und Weinberg überein)

Nachtrag: Andere Konstruktion des Energie-Impuls-Tensors $t_{\mu\nu}^{grav}$ (18a)

Ein (vermeintlich) anderer Zugang zum (freien) Energie-Impuls-Tensor $t_{\mu\nu}^{grav}$ des Gravitationsfeldes ist als Startpunkt eine Lagrange-Formulierung, welche in der linearisierten Feldgleichung (14) des Feldes $h_{\mu\nu}(x)$ resultiert. Die Konstruktion geht straight-forward (vgl. Sexl/Urbantke (6.20), Goenner (11.24)). Nach Sexl ((6.20) $\Rightarrow 2\varphi_{\mu\nu} \hat{=} -h_{\mu\nu}$) (vgl. auch Goenner (11.22)):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\left(\frac{8\pi G}{c^4}\right)}\left(\frac{1}{8}\, h^{\alpha\beta,\gamma} h_{\alpha\beta,\gamma} - \frac{1}{4}\, h^{\alpha\gamma,\beta} h_{\beta\gamma,\alpha} - \frac{1}{8}\,(h^{\alpha}_{\alpha})_{,\beta}\,(h^{\gamma}_{\gamma})^{,\beta} - h^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\,(h^{\gamma}{}_{\gamma})_{,\alpha}\right) - T^{mat}_{\mu\nu}\, h^{\mu\nu}$$

lineare Kopplung

Aus $\mathcal{L}$ lassen sich die Feldgleichungen über die Euler-Lagrange-Glg

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\mu\nu}{}_{,\beta}}\right) = 0$$

gewinnen. Aus dem "freien" Gravitationsanteil folgt dann sofort der Energie-Impulstensor über

$$t_{\mu}{}^{\nu} = h^{\kappa\lambda}{}_{,\mu}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{\kappa\lambda}{}_{,\nu}} - \mathcal{L}\,\delta_{\mu}{}^{\nu} \;\hat{=}\; (t_{\mu}{}^{\nu})^{grav}$$

Es zeigt sich (vgl. N. Straumann, Kap 4.4.3), dass dieser Energie-Impuls-Tensor der intuitiven Deduktion über $\Delta G^{(2)}_{\mu\nu}$ entspricht? Das ist nicht trivial und wichtig.

Obige Lagrange-Sprache definiert dann auch sofort die Energie-Impuls-Erhaltung der linearisierten Theorie:

$$\partial^{\mu}(\tau_{\mu\nu}) = \partial^{\mu}\left(T^{mat}_{\mu\nu} + t^{grav}_{\mu\nu}\right) \equiv 0$$

Asymptotische Felder von zeitlich veränderlichen Materiequellen

Sei eine gegebene, begrenzte, zeitabhängige Massenverteilung → keine Statik...

eine Frequenz? → negativ?

$$\tau_{\mu 0}(\vec r,t) \hat{=} T_{\mu 0}(\vec r)\exp(-i\omega t) + c.c. \begin{cases} \neq 0 & (|\vec r| \le r_0) \\ = 0 & (r > r_0) \end{cases} \quad (36)$$

Nach (18) haben wir die Lösung der zeitabh. Störungen der Metrik

$$h_{\mu 0}(\vec r,t) = -\frac{4G}{c^4}\exp(-i\omega t)\int d^3r'\, S_{\mu 0}(\vec r')\frac{\exp(ik|\vec r-\vec r'|)}{|\vec r-\vec r'|} + c.c. \quad (37)$$

→ retardierte Zeiten: $S_{\mu 0}\left(t-\frac{|\vec r-\vec r'|}{c}\right) \sim e^{-i\omega\left(t-\frac{|\vec r-\vec r'|}{c}\right)} = e^{-i\omega t}\, e^{ik|\vec r-\vec r'|}$ mit $k=\frac{\omega}{c}$

und $S_{\mu 0} = \tau_{\mu 0} - \eta_{\mu 0}\frac{\tau}{2}$

Unter der Annahme

$$r_0 \ll \lambda \ll r \quad (38)$$

← Detektion

↑ Fernfeld

↑ Wellenlänge $\sim 2\pi/k = 2\pi\frac{c}{\omega}$

wollen wir die Gravitations(ab-)strahlung berechnen.

$r \gg |\vec r'|$

$k|\vec r-\vec r'| = k\sqrt{(\vec r-\vec r')^2} \approx kr\sqrt{1-\frac{2\vec r\vec r'}{r^2}}$

$\approx kr\left(1-\frac{\vec r\vec r'}{r^2}\right) = kr - \underbrace{(k\vec e_r)}_{\equiv\vec k}\vec r'$

$$h_{\mu}(\vec r,t) \approx -\frac{4G}{c^4}\frac{\exp(i(kr-\omega t))}{r}\int d^3r'\, S_{\mu 0}(\vec r')\exp(-i\vec k\vec r') + c.c.$$

mit $k^\lambda = \left(\frac{\omega}{c}, \vec k = k\frac{\vec r}{r}\right)$

$$= -\frac{4G}{c^4}\frac{\exp(-ik_\lambda x^\lambda)}{r}\underbrace{S_{\mu 0}(\vec k)}_{\text{Fourier-Transformation der räuml. Verteilung der Quelle}} + c.c. \quad (39)$$

Interpretation →

$$\hat{=}\; e_{\mu 0}(\vec r,\omega)\exp(-ik_\lambda x^\lambda) + c.c. \quad (r \gg r_0)$$

$$\Rightarrow \quad e_{\mu 0}(\vec r,\omega) = -\frac{4G}{c^4 r}S_{\mu 0}(\vec k) = -\frac{4G}{c^4 r}\left(T_{\mu 0}(\vec k) - \frac{T(\vec k)}{2}\eta_{\mu 0}\right) \quad (40)$$

$\vec k = k\frac{\vec r}{r}$

Der durch das Flächenelement $r^2 d\Omega$ gehende Energiestrom dP ist

$$dP = c\, t^{\text{Grav}}_{0i}\, df^i = c\, t^{\text{Grav}}_{0i} \frac{x^i}{r} r^2 d\Omega$$

und der abgeleiteten Beziehung (34) wird für die Leistung pro Raumwinkel

$$\frac{dP}{d\Omega} = c \frac{c^4}{16\pi G} k_0 \frac{k_i x^i}{r} r^2 \left(e^{\lambda\nu *} e_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} |e^\lambda{}_\lambda|^2 \right)$$

(Im vorherigen Abschnitt waren die Amplituden $e_{\mu\nu}$ konstant, i.e. ebene Wellen, keine Kugelwellen. Der Energie-Impuls-Tensor enthält part. Ableitungen der $h_{\mu\nu}$. Für konstante Amplituden ergeben diese Ableitungen jeweils Faktoren $k_\mu \sim \frac{1}{\lambda}$. Da hier $e_{\mu\nu} \sim \frac{1}{r}$ zusätzlich von r abhängt, ergeben sich weitere Terme mit einem weiteren Faktor $\frac{1}{r}$, die aber für $r \gg \lambda$ im entfernten Aussenraum unterdrückt und vernachlässigbar sind.) Damit mit (40) und etwas Rechnen ($\eta^\lambda{}_\lambda = 4$, $T^\lambda{}_\lambda = T, \ldots$)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\omega^2}{\pi c^5} \left(T^{\lambda\nu *}(\hat{k}) T_{\lambda\nu}(\hat{k}) - \frac{1}{2} |T(\hat{k})|^2 \right) \tag{41}$$

mit $k_0 = \frac{\omega}{c}$, $\frac{k_i x^i}{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}/r = k \hat{e}_r \hat{e}_r = k = \frac{\omega}{c}$

Damit ist die Leistung der Gravitationsstrahlung durch die Fouriertransformierten $T_{\mu\nu}(\underline{k})$ der Quellverteilung ausgedrückt. Dieses wichtige (Zwischen-)Ergebnis lässt sich mittels der Kontinuitätsgleichung des Energie-Impuls-Tensors (in Ordnung $O(h)$) auf rein räumliche Komponenten umschreiben. Zunächst ist

$$T^{\mu\nu}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d^3k\, T^{\mu\nu}(\underline{k}) \exp(-i k_\lambda x^\lambda) + c.c. \tag{42}$$

Der Energie-Impuls-Erhaltungssatz lautet

$$T^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 0 \overset{O(h)}{\Rightarrow} \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \overset{(42)}{\Rightarrow} k_\nu T^{\mu\nu}(\underline{k}) = 0 \tag{43}$$

Speziell für $\mu=0$ und $\mu=i$ wird

$$k_0 T^{00}(\underline{k}) = -k_j T^{0j}(\underline{k}) \quad \text{und} \quad k_0 T^{i0}(\underline{k}) = -k_j T^{ij}(\underline{k})$$

Mit der Kurznotation $\hat{k}_\nu = \dfrac{k_\nu}{k_0}$ heisst dies

$$T^{i0} = T^{0i}(\underline{k}) = -\hat{k}_j T^{ij} \quad \text{und} \quad T^{00} = \hat{k}_i \hat{k}_j T^{ij}(\underline{k})$$

Damit findet man im Einzelnen

$$T^{\mu\sigma *} T_{\mu\sigma} = \eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\tau} T^{\mu\sigma *} T^{\rho\tau} = T^{00*}T^{00} - 2\sum_i T^{0i*}T^{0i} + \sum_{ij} T^{ij*}T^{ij}$$

$$= \hat{k}_i \hat{k}_j \hat{k}_l \hat{k}_m T^{ij*}T^{lm} - 2\hat{k}_j \hat{k}_m \delta_{il} T^{ij*}T^{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} T^{ij*}T^{lm}$$

$$T^{\lambda}{}_{\lambda} = \eta_{\lambda\rho} T^{\rho\lambda} = T^{00} - \sum_i T^{ii} = \hat{k}_i \hat{k}_j T^{ij} - \delta_{ij} T^{ij}$$

$$|T^{\lambda}{}_{\lambda}|^2 = \hat{k}_i \hat{k}_j \hat{k}_l \hat{k}_m T^{ij*}T^{lm} - \delta_{ij} \hat{k}_l \hat{k}_m T^{ij*}T^{lm} - \delta_{lm} \hat{k}_i \hat{k}_j T^{ij*}T^{lm} + \delta_{ij}\delta_{lm} T^{ij*}T^{lm}$$

Damit wird aus (41)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\omega^2}{\pi c^5} \Lambda_{ij,lm} T^{ij*}(\underline{k}) T^{lm}(\underline{k}) \tag{44}$$

mit

$$\Lambda_{ij,lm} \underbrace{(\theta,\varphi)}_{\text{Abstrahlwinkel von } \hat{k}} = \delta_{il}\delta_{jm} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{lm} - 2\delta_{il}\hat{k}_j \hat{k}_m + \frac{1}{2}\delta_{ij}\hat{k}_l \hat{k}_m + \frac{1}{2}\delta_{lm}\hat{k}_i \hat{k}_j + \frac{1}{2}\hat{k}_i \hat{k}_j \hat{k}_l \hat{k}_m$$

Quadrupolabstrahlung (in der Langwellennäherung)

Wegen $\lambda \gg r_0$ können wir schreiben
(als Annahme → also, falls $\omega \ll \left(\frac{r_0}{c}\right)$ physikalisch bedingt, dann okay)

$$T^{ij}(\underline{k}) = \int d^3r\, T^{ij}(\vec r)\, \exp(-i\underline{k}\underline{r}) = \int d^3r\, T^{ij}(\vec r)\,(1 - i\underbrace{\underline{k}\underline{r}}_{|\cdot| \ll 1} + \dots)$$

$$\approx \int d^3r\, T^{ij}(\vec r) \equiv -\frac{\omega^2}{2}\, Q^{ij} \qquad (45)$$

Diese Definition werden wir nun physikalisch interpretieren bzw. umformen.
Aus $T^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0$ (wie eben auf S. 21)

$$\partial_j T^{ij}(\vec r, t) = -\partial_0 T^{i0}(\vec r, t) \quad \text{und} \quad \partial_i T^{0i}(\vec r, t) = -\partial_0 T^{00}(\vec r, t)$$

$$\Rightarrow \partial_i \partial_j T^{ij}(\vec r, t) = \partial_0^2 T^{00}(\vec r, t) \overset{\text{Ansatz } e^{-i\omega t} + c.c.}{=} -\frac{\omega^2}{c^2}\, T^{00}(\vec r, t)$$

und kürzen des Faktors $e^{\pm i\omega t}$ des Ansatzes (36)

$$\partial_i \partial_j T^{ij}(\vec r) = (-)\frac{\omega^2}{c^2}\, T^{00}(\vec r)$$

Somit folgt aus (45)

$$Q^{ij} = -\frac{2}{\omega^2}\int d^3r\, T^{ij}(\vec r) \overset{\text{part. Integration, endlicher Träger, keine Oberflächenterme}}{=} -\frac{1}{\omega^2}\int d^3r\, x^i x^j \left(\partial_k \partial_l T^{lk}(\vec r)\right)$$

$$= \frac{1}{c^2}\int d^3r\, x^i x^j\, T^{00}(\vec r) \overset{\text{Definition des Quadrupoltensors}}{\hat{=}} \int d^3r\, x^i x^j \rho(r) \qquad (46)$$

Die Größe Q^{ij} ist der Quadrupoltensor des räumlichen Anteils der Massenverteilung. Mit (45) wird aus (44) dann

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\,\omega^6}{4\pi c^5}\,\Lambda_{ij,lm}\, Q^{ij\,*} Q^{lm} \qquad (47)$$

Das heisst, eine zeitabhängige Quadrupolbewegung ($\sim e^{i\omega t}$) triggert eine gravitative Strahlung.
ω^6 bedeutet $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^3 Q^{ij\,*} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^3 Q^{lm}$, wie in vielen Lehrbüchern (z.B. Sexl/Urbantke; Goenner, ...) angegeben.

Um die gesamte abgestrahlte Leistung zu erhalten, muß (44) über alle Winkel integriert werden.

Typischerweise (ohne Beweis, vgl. Fliessbach) ist für eine Quadrupolstrahlung

$$\frac{dP}{d\Omega} = a_1 \cos^4\theta + a_2 \cos^2\theta + a_3 \quad , \ \theta \hat{=} \text{ Azimuthalwinkel}$$

Weiter ist straight forward, aber ohne weitere Ausführung, das Ergebnis

$$P = \int d\Omega \, \overset{\swarrow (44)}{\frac{dP}{d\Omega}} = \ldots = \frac{2G\omega^6}{5c^5}\left(\sum_{i,j=1}^{3} |Q^{ij}|^2 - \frac{1}{3}\left|\sum_{i=1}^{3} Q^{ii}\right|^2\right) \tag{48}$$

(Note: Sexl/Urbantke hat in seiner Bilanz (6.33) einen Wert $-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5}\dddot{Q}^{ret}_{\alpha\beta}\dddot{Q}^{ret}_{\alpha\beta}$, also den halben Wert ...?)

Quellen der Gravitationsstrahlung (skizzenhaft, vgl. Fliessbach)

⇝ als mögliche Quellen rotierende, gravitierende Systeme:

Wasserstoffatom, allgemeiner Rotator, rotierender Balken, Doppelsternsystem, Pulsar, ... LIGO

Wasserstoffatom

$$\frac{m v^2}{a_B} \approx \frac{e^2}{a_B^2}\,, \quad L = m v a_B \approx \hbar \;\Rightarrow\; a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$$

$$E_{at} = \hbar \omega_{at} \simeq \frac{e^2}{a_B} = \alpha^2 m_e c^2 \qquad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137$$

elektrische Dipolstrahlung: Dipolmoment $p \approx e a_B$

$$P_{em} \simeq \frac{\omega^4}{3c^3}\, p^2$$ (vgl. Lehrbuch E-Dynamik, sowie auch (48))

⇒ Lebensdauer eines angeregten Zustandes (Größenordnung):

$$\tau_{em} \sim \frac{E_{at}}{P_{em}} \sim \frac{e^2}{a_B}\,\frac{c^3}{\omega_{at}^4 e^2 a_B^2} = \frac{\alpha^{-3}}{\omega_{at}} \sim 10^{-10}\,s$$

gravitative Quadrupolstrahlung: Quadrupolmoment $Q \sim m_e a_B^2$

$$\tau_{grav} \sim \frac{E_{at}}{P_{GW}} \overset{(48)}{\sim} \frac{e^2}{a_B}\,\frac{c^5}{\omega_{at}^6 G m_e^2 a_B^4} = \frac{e^2}{G m_e^2}\,\frac{\alpha^{-5}}{\omega_{at}} \mathrel{\hat=} 10^{34}\,s$$

10^{44} Verzweigungsverhältnis Photon zu Graviton (49)

Fazit: Gravitationsübergänge / -abstrahlung ist sehr schwach!

Rotator

starrer Rotator im Hauptachsensystem: $\Theta_{ij} = \int d^3r' \, x_i' x_j' \rho(\vec r') \hat{=} \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$

Annahme ($\to$ Dreh-Impulserhaltung): fixe Rotation um z-Achse: $\vec\omega = \Omega \vec e_3$

Beobachtung des Trägheitstensor im Lab-System (i.e. Rotation um z-Achse) (vgl. [illegible]

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_{11}(t) &= \frac{I_1+I_2}{2} + \frac{I_1-I_2}{2}\cos(2\Omega t) \\
\Theta_{12}(t) &= \frac{I_1-I_2}{2}\sin(2\Omega t) \\
\Theta_{22}(t) &= \frac{I_1+I_2}{2} - \frac{I_1-I_2}{2}\cos(2\Omega t) \\
\Theta_{33}(t) &= I_3 \,, \quad \Theta_{13} = \Theta_{23} = 0
\end{aligned}\right\}$$

↓ vgl. Ansatz (36) auf S. 19

$$\Theta_{ij}(t) = \mathrm{const} + [Q_{ij}\exp(-2i\Omega t) + c.c.$$

$$\Theta_{ij} = \frac{I_1 - I_2}{4}\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit der Definition

$I = I_1 + I_2$ – Trägheitsmoment bzgl. der Drehachse $\vec e_z$

$\varepsilon = \dfrac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$ – "Elliptizität" des Körpers (i.e. "Unwucht") $\to$ Quadrupol

wird für die Strahlungsleistung (48) wird $Q_{ij} \sim \frac{I\varepsilon}{4}$ und $\omega = 2\Omega$

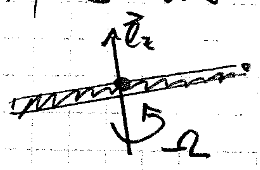
$$P = \frac{32\, G\, \Omega^6}{5c^5}\varepsilon^2 I^2 \qquad \left(\frac{2}{5}\cdot(2^6)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 4 = \frac{32}{5}\right) \qquad (50)$$

einer rotierenden Massenverteilung

Bsp: rotierender Balken: $M = 5\cdot10^5\,\mathrm{kg} = 500\,\mathrm{t}$, $L = 20\,\mathrm{m}$, $\Omega = 30\,\mathrm{s}^{-1}$

$I \approx I_1 = \frac{ML^2}{12}$, $I_2 \approx 0$, $\varepsilon \approx 1$

$I_3 \approx$

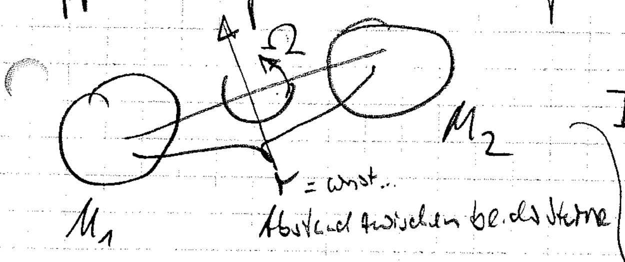


$\Rightarrow P = \ldots = 2{,}4\cdot10^{-29}\,W$ (sehr klein)

$\Phi_{GW} \sim \frac{P}{(4\pi)(\frac{L}{2})^2} \sim 6\cdot10^{-32}\,\frac{W}{m^2}$ ← nicht nachweisbar

↑ Energiestromdichte in der Umgebung

Doppelsternsystem (vereinfacht: nur Kreisbahn)



$$I \approx I_1 = \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2} r^2 \quad (\approx I_3), \quad I_2 \cong 0, \quad \varepsilon \approx 1$$

Kräftegleichgewicht ("Newtonian"):

$$\frac{M_1 M_2}{M_1+M_2}\,\Omega^2 r^2 = \frac{G M_1 M_2}{r^2} \Rightarrow \Omega^2 = \frac{G(M_1+M_2)}{r^3} \qquad (51)$$

Für die Strahlungsleistung (50) wird:

$$P = \frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M_1^2 M_2^2 (M_1+M_2)}{r^5} \qquad (52)$$

Somit erhalten wir mit dem Abstand D des Doppelsternsystems zur Erde die Energiestromdichte

(1pc = 3,26 LJ) ← ℓ → Abstand r

Bsp.: $\Phi_{GW} = \frac{P}{4\pi D^2}$ ⟶ Doppelsternsystem ι Boo: $D = 12\,pc$, $T = 0{,}268\,d$, $M_1 = 1{,}35\,M_\odot$, $M_2 = 0{,}68\,M_\odot$

$$\Phi_{GW} = \frac{P_{\iota Boo}}{4\pi D^2} = \frac{3{,}23\cdot 10^{23}\,W}{4\pi D^2} \approx 1{,}8\cdot 10^{-13}\,\frac{W}{m^2}$$

Die Abstrahlung (52) bedeutet einen Energieverlust, so daß aufgrund der sich verringernden Gesamtenergie, i.e. $\frac{dE}{dt} < 0$, sich langsam, aber stetig, auch der Abstand r sich verringert, bis die Sterne nach einer sog. Spiralzeit t_{spir} ineinanderstürzen:

$$E_{tot}^{(Newton)} = E_{pot} + E_{kin} = -\frac{G M_1 M_2}{2r}$$

$$P = -\frac{dE_{tot}}{dt} = -\frac{G M_1 M_2}{2r^2}\frac{dr}{dt} \overset{(52)}{=} \frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M_1^2 M_2^2 (M_1+M_2)}{r^5}$$

Energieerhaltung: $\partial_\mu t^{\mu\nu}(h_{ij}) = 0$

Mittels der Ersetzung $x(t) = \left(\frac{r(t)}{r(0)}\right)^4$ folgt die einfachere Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{256\, G^3}{5 c^3}\frac{M_1 M_2 (M_1+M_2)}{r(0)^4} \mathrel{\hat=} -\frac{1}{t_{spir}} \Rightarrow x(t) = 1 - \frac{t}{t_{spir}} \qquad (53)$$

$$\Rightarrow r(t) = r(0)\left(1 - \frac{t}{t_{spir}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Als Beispiel sei $M_1 = M_2 = M_\odot$, $r(0) = 10\,R_\odot$,

$$t_{spir} = \frac{5}{512}\underbrace{\left(\frac{c^2 r(0)}{GM}\right)^3}_{1/2\,10^{-6}} \underbrace{\frac{r(0)}{c}}_{2{,}3\,s} \sim 10^{13}\,a \gg 10^{10}\,a \mathrel{\hat=} \text{Weltalter}$$

Als weiteres, energiereicheres Ereignis seien zwei kompakte (Neutronen-) Sterne innerhalb unserer Milchstrasse ($d_{milkyway} \sim 3\cdot 10^4\,pc$):

$M_1 = M_2 = M_\odot$, $r = 30\,km$, $D = 10^3\,pc \ll d_{milkyway}$

Ω aus (51) folgt $T = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 2\,ms$, aus (53) $t_{spir} \approx 80\,ms$

Die beiden Sternen stehen also kurz vor dem Kollaps (vgl. auch Ligo-Events zweier spiralierender schwarzer Löcher / Neutronensterne – "binary mergers").

N.B.: $r \sim r_0 \lesssim 30\,km$, Gilt für unsere Abschätzung der Langwellen-Näherung $\lambda \gg r_0$? (vgl (38) und (45))

$$\lambda \approx cT = 3\cdot 10^5\,\frac{km}{s}\cdot 2\,ms = 600\,km$$

Damit ist die Näherung (noch) gut erfüllt, i.e. $\lambda \gg r_0$.

Werten wir noch die Abstrahlungsleistung (52) aus, so findet man

$$P \simeq 10^{47}\,W \quad \text{und} \quad \phi_{GW} = \frac{P}{4\pi D^2} \approx 10^7\,\frac{W}{m^2}$$

Die Energiestrom-Dichte ist i.d.T. hoch (zum Vergleich: Sonneneinstrahlung $10^{3}\,\frac{W}{m^2}$)

Diese "Bestrahlung" besteht allerdings nur für kurze Zeit (wegen $t_{spir} \sim 0.1\,s$), die gemachten Annahmen sind zwar (sehr) optimistisch, aber nicht abwegig.

Nachweismethoden von Gravitationswellen (beispielhaft)

(a) **PSR 1913+16** ("Hulse-Taylor-Pulsar"):

Das Gebilde PSR 1913+16 besteht aus einem Pulsar (Neutronenstern) und einem nicht sichtbaren Begleiter, der ebenfalls ein Neutronenstern sein dürfte:

sehr präzise Messung ("Pulsar")

$$\left.\begin{aligned} T &= 27906{,}9807807 \pm \ldots \, s \\ M_1 &= (1.411 \pm 0.0007)\, M_\odot \\ M_2 &= (1{,}3873 \pm 0.0007)\, M_\odot \end{aligned}\right\} \Rightarrow r(0) \Rightarrow t_{spir} \sim 10^8 \text{ Jahre}$$

also nicht beobachtbar...

Aber: aufgrund des Kepler-Gesetzes $T^2 \sim r^3 \Rightarrow 2\frac{dT}{T} = 3\frac{dr}{r}$

ist $\frac{dT}{dt} = \frac{3}{2}\frac{T}{r}\frac{dr}{dt} = -\frac{3}{8}\frac{T}{t_{spir}} \propto 10^{-12}$

und speziell genauer

$$\frac{dT}{dt} = -(2{,}425 \pm 0.01)\cdot 10^{-12}$$

Diese Abschätzung erklärt die ungefähre Verringerung. Die sorgfältige Analyse des exp. Befunds ergibt, dass die beobachtete Abnahme mit einer relativen Genauigkeit von 1% mit dem theoretischen Wert übereinstimmt! $\rightarrow$ Nobelpreis an R.A. Hulse und J.H. Taylor 1993

$\rightarrow$ Hausübung

genauer: $\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} \overset{\text{Kreisbahn}}{=} \frac{3}{2}\frac{dr}{r} \quad \underset{=}{E_{tot}} = -\frac{GM_1M_2}{2r} \quad (-)\frac{3}{2}\frac{dE_{tot}}{E_{tot}} = (-)\frac{3}{2}\,\frac{64}{5}\,\frac{G^3}{c^5}\,\frac{M_1M_2(M_1+M_2)}{r^4}$

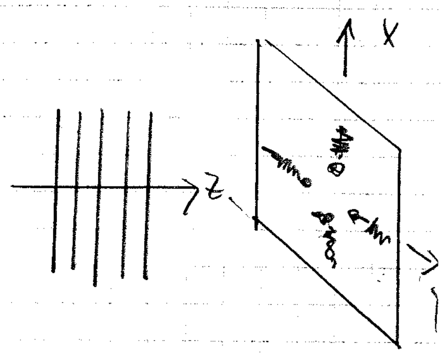
weiter ist $T = \frac{2\pi}{\omega} \overset{\text{3. Kepler-Gesetz (51)}}{=} \frac{2\pi\, r^{3/2}}{[G(M_1+M_2)]^{1/2}}$ folgt mit $\frac{1}{r} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-2/3}[G(M_1+M_2)]^{-1/3}$

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = (-)\,\frac{96}{5}\,\frac{G^2}{c^5}\,\frac{M_1M_2}{[G(M_1+M_2)]^{1/3}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{8}{3}} \qquad (54)$$

($\rightarrow$ vgl. (11.70) im Goenner ohne Exzentrizität)

(b) Resonanzdetektoren (vgl. Kienbach)

Die ersten Versuche eines direkten Nachweises von Gravitationswellen sind mit dem Namen des Physikers Joseph Weber verbunden. In den 1960er-Jahren konstruierte dieser als Pionier der Gravitationswellendetektion bezeichnete Wissenschaftler Resonanzwellendetektion. Nach der Theorie verformen Gravitationswellen Testkörper



– prinzipieller Aufbau –

$$\frac{\Delta L_{x,y}}{L} = \pm h \cos \omega t$$ (Quadrupol-Schwingung)

Diese Verformung wird in Webers Detektoren dann anschliessend über den piezoelektrischen Effekt in ein elektrisches Signal umgewandelt.

$M \sim 1000\,\mathrm{kg}$, $L \sim 1\,\mathrm{m}$, $\omega_0 \approx 10^4\,s^{-1}$

Ziel ist es, „Eigenschwingungen" des Aufbaus mit ω_0 zu treffen, i.e. „Resonanz" $\omega_{Grav} \to \omega_0$. Problem ist ein thermisches Rauschen.

Die Nachweisgrenze für einen solchen Detektor liegt bei einer Amplitude $h \approx 10^{-22}$. Die Ergebnisse, die Weber gefunden hat(te), lassen sich jedoch nicht reproduzieren.

Webers ursprünglicher Detektor erreichte $h_{min} \approx 10^{-15}$. Als bekannte Strahlungsquelle mit der festen Frequenz $\omega_0 = 10^4\,s^{-1}$ kommt nur ein Pulsar in Frage. Die zu erwartenden Amplituden sind um viele Größenordnungen kleiner.

Interferometer – LIGO (vgl. Fliessbach)

Die relative Längenänderung, die mit dem Interferometer gemessen werden soll, ist proportional der Amplitude h. Die Amplitude hängt von der Energiestromdichte ab:

$$h \simeq \left(\frac{8\pi G\, \Phi_{GW}}{c^3\, \omega^2_{Grav}}\right)^{1/2} \approx 1{,}4\cdot 10^{-18} \left(\frac{\Phi_{GW}}{W/m^2}\right)^{1/2} \frac{T}{s}$$

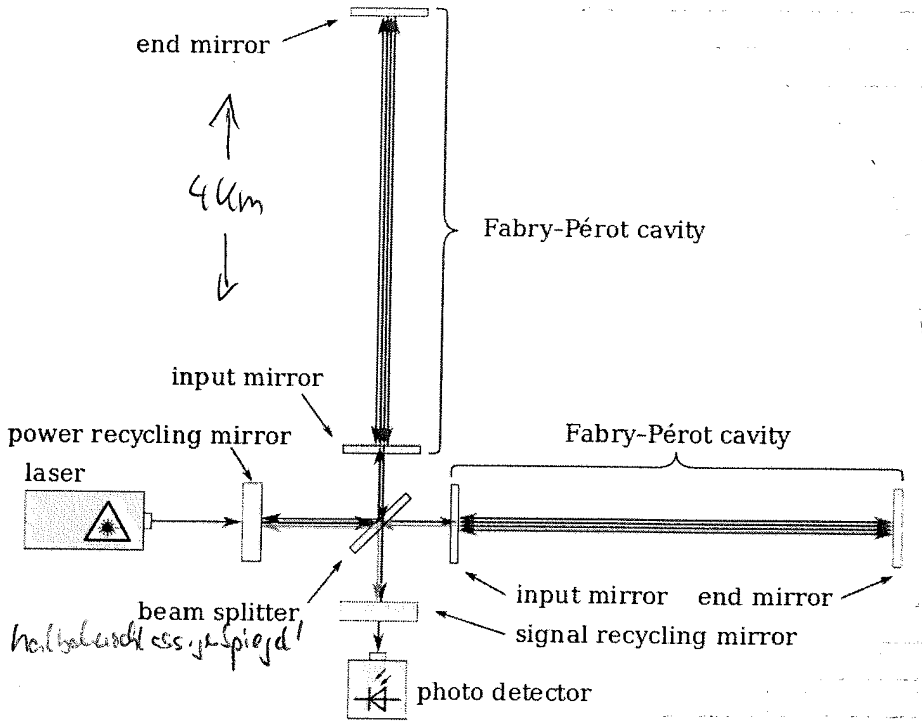
← Schwingungsdauer der Gravitationswelle in Sekunden

Für das Doppelsternsystem ι-Boo ergibt sich beispielsweise eine Amplitude von $h \approx 10^{-20}$. Der exp. Aufbau muss also in der Lage sein, winzige Längenänderungen zu messen. Auf einen Kilometer beträgt die Änderung gerade 0,01 fm!

From Wikimedia Commons, the free media repository

~ schematischer Aufbau vom LIGO (Laser Interferometer Gravitational wave Observatory)

2 Arme → Quadrupolstrahlung



Mehrere Arbeitsgruppen versuchen, Gravitationswellen über die Interferenz von Laserlicht, welches zwischen zwei Spiegeln hin- und herläuft nachzuweisen. Dazu werden zwei Massen (ca. 1000 kg) mit Spiegeln im Abstand L als Pendel aufgehängt. Da die Pendelfrequenz so viel kleiner ist als die Frequenz ω_{Grav}, bewegen sich die Massen wie freie Teilchen.

Die senkrecht zu L einfallende Welle induziert eine phys. Längenänderung ΔL und damit zu einer Phasenverschiebung

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda_\gamma} \leftarrow \text{Wellenlänge des Laser}$$

des Laserlichtes, welches die Strecke zwischen den Spiegeln zurücklegt.
Die Messgenauigkeit kann durch N-faches Durchlaufen der Strecke L und durch hohe Laserleistung I erhöht werden.
Die Zeit zwischen minimaler und maximaler Auslenkung ΔL ist $\delta t = \frac{\pi}{\omega_{Gr}}$
Während dieser Zeitspanne durchquert das Licht N-mal die Strecke zwischen den Spiegeln; ein längerer Lichtweg ist nicht sinnvoll, da die summierende Auslenkung dann wieder klein wird:

$$N \cdot L \triangleq c\delta t = \frac{\pi c}{\omega_{Grav}}$$

$\leftarrow$ also hohes ω_γ...

$$\Rightarrow \quad \Delta\phi_{GW} = 2\pi \frac{N\Delta L}{\lambda_\gamma} = \frac{2\pi \; NL}{c \cdot \frac{2\pi}{\omega_\gamma}} \cdot \frac{\Delta L}{L} = \pi \frac{\omega_\gamma}{\omega_{Grav}} h$$

Die Phase ϕ besitzt eine quantenmechanische Unschärfe (!),

$$\Delta\phi_{q.m.} \gtrsim \frac{1}{2\Delta N_\gamma} \approx \frac{1}{2\sqrt{N_\gamma}}$$

$\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar$, $\Delta p \sim \Delta N_\gamma \cdot \hbar k$, $\Delta x \sim c\Delta t$
$\Delta x \sim c\frac{\Delta\phi}{\omega} \sim \frac{\Delta\phi}{k} \Rightarrow \Delta p \cdot \Delta x \sim \frac{\Delta\phi}{k}\Delta N_\gamma \hbar k \gtrsim \hbar$
$\Rightarrow \Delta\phi \Delta N_\gamma \gtrsim 1$

Die relevante Anzahl der Photonen mit der Energie $\hbar\omega_\gamma$

$$\langle N_\gamma \rangle \sim \underbrace{\frac{\pi}{\omega}}_{\delta t} P_\gamma \cdot \frac{1}{\hbar\omega_\gamma}$$

P_γ $\leftarrow$ Leistung

$\Leftarrow$ ... starker Laser, i.e. kohärent viele Photonen

Damit $\Delta\phi_{GW} \overset{!}{\gtrsim} \Delta\phi_{q.m.}$ folgt

$$h \gtrsim \left(\frac{1}{4\pi^3}\frac{\hbar\omega_{Grav}}{P_\gamma/\omega_{Grav}}\frac{\omega_{Grav}}{\omega_\gamma}\right)^{1/2} = h_{min} = \sqrt{\frac{\hbar\,\omega_{GW}^3}{4\pi^3 P_\gamma \omega_\gamma}}$$

Am LIGO-Detektor können Amplitude von $h = 10^{-21}$ nachgewiesen werden.