S. Leupold, H. van Hees **Wintersemester 2008/9**

Übungen zur Höheren Quantenmechanik

Abgabedatum: 4.11.2008

Blatt 2

Aufgabe 1 (Fouriertransformation und Diracsche δ-Funktion)

Wir betrachten ein Teilchen, das sich in einer Raumdimension bewegen kann. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, besitzen der Orts- und Impulsoperator $\mathbf{x}$ und $\mathbf{p}$ ein kontinuierliches Spektrum, d.h. alle reellen Zahlen sind „verallgemeinerte“ Eigenwerte. Die Normierung der verallgemeinerten Eigenzustände war so gewählt, daß die Vollständigkeitsrelationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, |x\rangle \langle x| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar} |p\rangle \langle p| = \mathbb{1} \tag{1}$$

lauten. Weiter ergab sich als Ortsdarstellung der verallgemeinerten Impulseigenfunktionen

$$\langle x \,|\, p \rangle = \exp\left(\frac{\mathrm{i}px}{\hbar}\right). \tag{2}$$

Die Vollständigkeitsrelation für die Impulseigenzustände (1) lautet also in der Ortsdarstellung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar} \langle x \,|\, p \rangle \langle p \,|\, x' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{\mathrm{i}p(x-x')}{\hbar}\right] = \langle x \,|\, x' \rangle = \delta(x-x'), \tag{3}$$

wobei δ die Diracsche δ-Distribution ist.

(a) Zeigen Sie, daß aufgrund der Vollständigkeitsrelation der verallgemeinerten Ortseigenzustände die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left[\frac{\mathrm{i}x(p'-p)}{\hbar}\right] = 2\pi\hbar\delta(p'-p) \tag{4}$$

gilt. Begründen Sie weiter mit Hilfe von (4), daß

$$\delta(p-p') = \delta(p'-p) \tag{5}$$

ist.

(b) Sei $|\psi\rangle$ ein Hilbertraumvektor. Zeigen Sie daß die entsprechenden Wellenfunktionen in der Ortsdarstellung $\psi(x) := \langle x \,|\, \psi \rangle$ und Impulsdarstellung $\tilde{\psi}(p) = \langle p \,|\, \psi \rangle$ durch die Fouriertransformationen

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{\mathrm{i}px}{\hbar}\right) \tilde{\psi}(p), \quad \tilde{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left(-\frac{\mathrm{i}px}{\hbar}\right) \psi(x) \tag{6}$$

auseinander hervorgehen.

(c) Zeigen Sie, daß die Skalarprodukte von Hilbertraumvektoren unabhängig von der Wahl der Darstellung sind, d.h. daß in der Tat für zwei Hilbertraumvektoren $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$

$$\langle \psi_1 \,|\, \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \psi_1^*(x)\psi_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar} \tilde{\psi}_1^*(p)\tilde{\psi}_2(p) \tag{7}$$

gilt.

(d) Der Zustand eines Teilchens ist durch die Ortswellenfunktion

$$\psi(x) = N \exp\left(-\frac{x^2}{4\Delta x^2}\right) \tag{8}$$

gegeben. Berechnen Sie die Normierungskonstante, so daß die Normierungsbedingung $\langle \psi \,|\, \psi \rangle = 1$ erfüllt ist. Bestimmen Sie die Impulswellenfunktion sowie die Erwartungswerte und Standardabweichungen von Ort und Impuls. Vergewissern Sie sich, daß Sie für den Erwartungswert des Impulses berechnet in der Orts- bzw. Impulsdarstellung tatsächlich das gleiche Resultat erhalten:

$$\langle \psi \,|\mathbf{p}|\, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \psi^*(x) \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar} \tilde{\psi}^*(p) p \tilde{\psi}(p). \tag{9}$$

Hinweis: Sie können das Gaußintegral

$$G(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp(-ax^2) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{10}$$

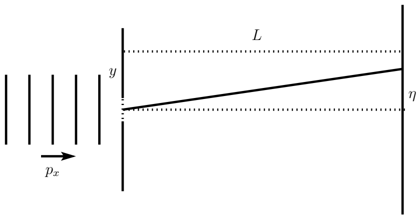
ohne Beweis verwenden. Beachten Sie, daß daraus durch Differentiation nach a die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, x^{2n} \exp(-ax^2) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n} G(a) \tag{11}$$

bestimmt werden können.

Bitte beachten Sie Aufgabe 2 auf der nächsten Seite.

Aufgabe 2 (Durchgang von Teilchen durch Spalt, Unschärferelation)



Ein Strom von Teilchen (z.B. Elektronen) mit Impuls $\vec{p} = p_x \hat{e}_x$ fällt auf einen Spalt der Breite d. Unter der Annahme, daß der Spalt gleichmäßig von Teilchen getroffen wird, ist die Wellenfunktion der Teilchen zum Zeitpunkt des Auftreffens auf den Spalt also durch

$$\psi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \Theta\left(\frac{d}{2} - |y|\right) \exp\left(\frac{\mathrm{i} x p_x}{\hbar}\right) \tag{12}$$

gegeben. Dabei ist

$$\Theta(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi \geq 0 \\ 0 & \text{für } \xi < 0 \end{cases} \tag{13}$$

die Heavisidesche Einheitsstufenfunktion. Sie werden mit Hilfe einer Photoplatte im Abstand L vom Spalt registriert.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(p_y)$ für die Impulskomponente p_y.

(b) Schätzen Sie die Unschärfe Δp der Impulskomponente p_y durch die Breite des Hauptmaximums der Verteilung $P(p_y)$ ab.

(c) Interpretieren Sie das Resultat im Hinblick auf die Heisenbergsche Unschärferelation für die Präparation von Ort und Impuls.

(d) Der Impuls p_y wird durch die Position η auf der Photoplatte bestimmt. Leiten Sie die entsprechende Verteilung $\tilde{P}(\eta)$ her! Dabei dürfen Sie annehmen, daß die Impulskomponente p_x beim Durchgang durch den Spalt ungeändert bleibt.