S. Leupold, H. van Hees **Wintersemester 2008/9**

Übungen zur Höheren Quantenmechanik

Abgabedatum: 02.12.2008

Blatt 6

Aufgabe 1 (Feldoperatoren freier Teilchen in würfelförmigem Behälter)
Wir betrachten nichtrelativistische freie Teilchen mit Spin $s \in \{0, 1/2, 1, \ldots\}$ in einem würfelförmigen Behälter der Kantenlänge L. Der Hamiltonoperator für ein Teilchen ist

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\vec{\mathbf{p}}^2}{2m}. \tag{1}$$

(a) Finden Sie einen vollständigen Satz von Impuls-Spineigenfunktionen, wobei die Wellenfunktionen $\psi_\sigma(\vec{x})$ periodischen Randbedingungen $\psi_\sigma(\vec{x} \pm L\vec{e}_j) = \psi_\sigma(\vec{x})$ genügen. Dabei numeriert $\sigma \in \{-s, -s+1, \ldots, s-1, s\}$ die $(2s+1)$ Eigenfunktionen der Spinkomponente $\mathbf{s}_z$ zu den Eigenwerten $\sigma\hbar$ durch.

(b) Das Vielteilchensystem wird dann durch fermionische oder bosonische Vernichtungsoperatoren $\mathbf{a}(\vec{p}, \sigma)$ beschrieben. Betrachten Sie nun die Feldoperatoren im Heisenbergbild der Zeitentwicklung

$$\boldsymbol{\phi}(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{p},\sigma} \frac{1}{L^{3/2}} \mathbf{a}(\vec{p}, \sigma) u_\sigma \exp\left[-\mathrm{i}\frac{\omega(\vec{p})t - \vec{x}\vec{p}}{\hbar}\right] \quad \text{mit} \quad \omega(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}. \tag{2}$$

Dabei sind die u_σ die $(2s+1)$ orthonormierten Eigenvektoren (d.h. es gilt $u_\sigma^\dagger u_{\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}$) von $\mathbf{s}_z$ zu den Eigenwerten $\sigma \in \{-s\hbar, (-s+1)\hbar, \ldots, s\hbar\}$. Zeigen Sie, daß dieser Feldoperator die Schrödinger-artige zeitabhängige Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\phi}(t, \vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\boldsymbol{\phi}(t, \vec{x}) \tag{3}$$

erfüllt.

(c) Betrachten Sie nun nacheinander Bosonen und Fermionen. Sie sind durch die Kommutator- bzw. Antikommutatorregeln

$$[\mathbf{a}(\vec{p}, \sigma), \mathbf{a}(\vec{p}', \sigma')]_\mp = 0, \quad \left[\mathbf{a}(\vec{p}, \sigma), \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}', \sigma')\right]_\mp = \delta_{\vec{p},\vec{p}'}\delta_{\sigma,\sigma'} \tag{4}$$

charakterisiert. Dabei steht das obere Vorzeichen für Kommutatoren und Bosonen, das untere für Antikommutatoren und Fermionen. Zeigen Sie, daß diese Relationen auf die aus der Vorlesung bekannten Regeln

$$[\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{\sigma}}(t, \vec{x}), \boldsymbol{\phi}_{\sigma'}(t, \vec{x}\,')]_\mp = 0, \quad \left[\boldsymbol{\phi}_\sigma(t, \vec{x}), \boldsymbol{\phi}_{\sigma'}^\dagger(t, \vec{x}\,')\right]_\mp = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}\,')\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{5}$$

führen, wobei $\boldsymbol{\phi}_\sigma = u_\sigma^\dagger \boldsymbol{\phi}(t, \vec{x})$ die Spinkomponenten von $\boldsymbol{\phi}$ bezeichnen.

(d) Drücken Sie Gesamtteilchenzahl- und Hamiltonoperatoren des Vielteilchensystems

$$\mathbf{N} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \boldsymbol{\phi}^\dagger(t,\vec{x})\boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}), \quad \mathbf{H} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \boldsymbol{\phi}^\dagger(t,\vec{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right) \boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}) \tag{6}$$

mit Hilfe von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\mathbf{a}(\vec{p},\sigma)$ und $\mathbf{a}^\dagger(\vec{p},\sigma)$ aus.

(e) Zeigen Sie, daß unabhängig davon, ob es sich um Fermionen oder Bosonen handelt, Gesamtteilchenzahl- und Hamiltonoperator kommutieren:

$$[\mathbf{N},\mathbf{H}]_- = 0. \tag{7}$$

Was bedeutet dies für die Teilchenzahl physikalisch?

Hinweis: Es gelten die folgenden für drei beliebige Operatoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ gültigen Formeln

$$[\mathbf{AB},\mathbf{C}]_- = \mathbf{A}\,[\mathbf{B},\mathbf{C}]_\mp \pm [\mathbf{A},\mathbf{C}]_\mp\,\mathbf{B}. \tag{8}$$

(f) Zeigen Sie, daß Gl. (3) für den Feldoperator im Heisenbergbild kompatibel mit der Bewegungsgleichung

$$[\boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}),\mathbf{H}] = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\phi}(t,\vec{x}) \tag{9}$$

ist.

Freiwillige Zusatzaufgaben

(g) Sei $|\Omega\rangle$ der Vakuumzustand, der durch

$$\mathbf{a}(\vec{p},\sigma)\,|\Omega\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad \vec{p},\sigma \tag{10}$$

definiert ist. Zeigen Sie unter Verwendung der Resultate von Übungsblatt 3 zum Energieeigenwertproblem des Hamiltonoperators, daß für Bosonen die Zustände

$$|\{n(\vec{p},\sigma)\}\rangle = \prod_{\vec{p},\sigma} \frac{1}{\sqrt{n(\vec{p},\sigma)!}} \left[\mathbf{a}^\dagger(\vec{p},\sigma)\right]^{n(\vec{p},\sigma)} |\Omega\rangle\,, \quad n(\vec{p},\sigma) \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\} \tag{11}$$

simultane Eigenzustände zu den Besetzungszahloperatoren für die Impuls-Spin-Einteilchenzustände $\mathbf{n}(\vec{p},\sigma)$ sind und eine vollständige Orthonormalbasis für das Vielteilchensystem unbestimmter Teilchenzahl (Fockraum) bilden. Zeigen Sie, daß jeder dieser Zustände Eigenzustand des Gesamtteilchenzahloperators $\mathbf{N}$ zum Eigenwert $N = \sum_{\vec{p},\sigma} n(\vec{p},\sigma)$ ist.

(h) Zeigen Sie, daß dieselbe Konstruktion auch für den fermionischen Fall gilt. Welche Einschränkung ergibt sich dabei aus den Antikommutatorregeln für die möglichen Eigenwerte der $n(\vec{p},\sigma)$?