Vorkurs Mathematik
für Physiker und Materialwissenschaftler

W. Cassing

27. September 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen

Eine komlexe Zahl z kann als Vektor in einer zweidimensionalen Ebene (**Gaußsche Zahlenebene**) dargestellt werden. Zweckmäßiger ist die folgende Darstellung einer komplexen Zahl

$$z := x + \mathrm{i}y \tag{1}$$

mit der Definition $\mathrm{i}^2 = -1$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Wie bei reellen Zahlen ist eine **Addition** und eine **Multiplikation** definiert:

$$\text{Addition:} \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) = z_2 + z_1, \tag{2}$$

$$\text{Multiplikation:} \quad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2) = z_2 z_1. \tag{3}$$

Dabei entsteht die Multiplikationsformel durch formales „Ausmultiplizieren“ und Berücksichtigung der Definition $\mathrm{i}^2 = -1$. Sowohl die Addition als auch die Multiplikation sind **kommutativ**, d.h. es kommt nicht auf die Reihenfolge der Rechenoperationen an. Zusätzlich ist die **komplexe Konjugation**

$$\bar{z} = z^* = x - \mathrm{i}y \tag{4}$$

als Spiegelung an der x-Achse definiert. Mit der Abbildung (4) läßt sich der **Betrag** der komplexen Zahl

$$|z| = \sqrt{z^* z} = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \tag{5}$$

ermitteln. Der Betrag entspricht in der Gaußschen dem Abstand des Punktes (x, y) vom Ursprung. Mit Hilfe des Betrages läßt sich für $z \neq 0 + \mathrm{i}0 := 0$ das **Inverse** einer komplexen Zahl berechnen:

$$\text{Inverse} \quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{6}$$

Aufgrund des Vektorcharakters einer komplexen Zahl in der Gaußschen Zahlenebene kann man alternativ auch die Polardarstellung

$$z = r[\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)] \tag{7}$$

verwenden. Dabei ist $r = |z|$ der Betrag der kopmlexen Zahl und ϕ der Winkel, der durch $\cos\phi = x/|z|$ und $\sin\phi = y/|z|$ bestimmt wird. Dieser Winkel heißt auch **Argument der komplexen Zahl**. Definiert man für ϕ den Bereich $[0, 2\pi[$, so ist der das Argument eindeutig durch

$$\phi = \arg z = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) & \text{falls} \quad y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) & \text{falls} \quad y < 0 \end{cases} \tag{8}$$

gegeben.

Man unterscheidet bei einer komplexen Zahl den **Realteil**

$$\operatorname{Re} z = x = r\cos(\phi), \tag{9}$$

welcher der Projektion auf die x-Achse entspricht, und den Imaginärteil

$$\operatorname{Im} z = y = r\sin(\phi), \tag{10}$$

welcher mit der Projektion auf die y-Achse zu identifizieren ist.

Die **Multiplikation in Polardarstellung** entspricht der reellen Multiplikation der „Längen" und einer Addition der „Winkel":

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\phi_1 + \phi_2) + \mathrm{i}\sin(\phi_1 + \phi_2)] \tag{11}$$

mit $r_j = |z_j|$ und $\cos(\phi_j) = x_j/|z_j|$ und $\sin(\phi_j) = y_j/|z_j|$. Dies zeigt man durch Ausmultiplizieren und Anwendung der **Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen** (vgl. die Übungen):

$$\begin{aligned} \cos(\phi_1 + \phi_2) &= \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2), \\ \sin(\phi_1 + \phi_2) &= \sin(\phi_1)\cos(\phi_2) + \cos(\phi_1)\sin(\phi_2). \end{aligned} \tag{12}$$

Die $n-$te **Potenz** (für $n \in \mathbb{N}$) einer komplexen Zahl $z = r[\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)]$ lautet somit

$$z^n = r^n[\cos(n\phi) + \mathrm{i}\sin(n\phi)]. \tag{13}$$

Analog kann man für $z \neq 0$ die $n-$te Wurzel ziehen, z.B. lautet eine Quadratwurzel

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]. \tag{14}$$

Wie schon im Reellen ist allerdings das Wurzelziehen nicht eindeutig!

Beispiele zur Rechnung mit komplexen Zahlen:

Im folgenden seien $x_j, y_j \in \mathbb{R}$.

i) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2} = \frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}\,\frac{x_2-\mathrm{i}y_2}{x_2-\mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$

ii) $\frac{1}{2}(z+z^*) = \frac{1}{2}(x+x) = x = \operatorname{Re} z$

iii) $\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-z^*) = \frac{2\mathrm{i}y}{2\mathrm{i}} = y = \operatorname{Im} z$

iv) $zzz^*z^* = zz^*zz^* = |z|^4 = r^4$

2 Elementare komplexe Funktionen

Da Addition und Multiplikation auf den komplexen Zahlen definiert sind, kann man folgende Summe bilden (mit $0! = 1$):

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{15}$$

Die enstehende komplexe Funktion

$$\exp(z) = e^z = \operatorname{Re}\exp(z) + \mathrm{i}\operatorname{Im}\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{16}$$

wird als „Exponentialfunktion“ bezeichnet und ist für alle komplexen Zahlen $z \neq 0$ definiert. Die Exponentialfunktion (16) hat die Eigenschaft

$$\begin{aligned} \exp(z_1+z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k\, z_2^{n-k} = \cdots \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}\right) = \exp(z_1)\exp(z_2). \end{aligned} \tag{17}$$

Für $z = \mathrm{i}\phi$ mit $\phi \in \mathbb{R}$ läßt sie sich leicht aufteilen in Real- und Imaginärteil

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} = 1 + \mathrm{i}\phi - \frac{\phi^2}{2} - \mathrm{i}\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{18}$$

Da $\tilde{z} = \exp(\mathrm{i}\phi)$ eine komplexe Zahl vom Betrag $1 = \tilde{z}\tilde{z}^*$ ist, d.h. für ϕ aus dem Intervall $[0, 2\pi[$ gerade den Einheitskreis darstellt, gilt

$$\operatorname{Re}\exp(\mathrm{i}\phi) = \frac{1}{2}[\exp(\mathrm{i}\phi) + \exp(-\mathrm{i}\phi)] = \cos\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{2n}}{(2n)!} = \cos(-\phi) \tag{19}$$

$$\operatorname{Im}\exp(\mathrm{i}\phi) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\exp(\mathrm{i}\phi) - \exp(-\mathrm{i}\phi)] = \sin\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(-\phi) \tag{20}$$

für die Reihenentwicklung und Symmetrie von $\cos\phi$ und $\sin\phi$.

Weitere Folgerungen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e} &:= \exp(1) = \sum_{n=0} \frac{1^n}{n!} = \sum_{n=0} \frac{1}{n!}, \\
\mathrm{e}^0 &:= \exp(0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1, \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} &= \exp(\mathrm{i}\phi) = \cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)
\end{aligned} \tag{21}$$

und

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = \exp(\mathrm{i}\phi)\exp(-\mathrm{i}\phi) = 1. \tag{22}$$

Die Polardarstellung der komplexen Zahlen läßt sich folglich auch in der Form

$$z = r[\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)] = r\exp(\mathrm{i}\phi) \tag{23}$$

schreiben. Damit wird die Multiplikation gegenüber der Darstellung mit trigonometrischen Funktionen vereinfacht:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)} \tag{24}$$

mit $r_j = |z_j|$, $\cos(\phi_j) = x_j/|z_j|$, $\sin(\phi_j) = y_j/|z_j|$. Es ergibt sich daraus sofort auch (11).

Eine n-te Wurzel von z berechnet sich als

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/n} \tag{25}$$

für $z \neq 0$. Diese ist aber nicht eindeutig bestimmt, denn die Gleichung

$$w^n = z \tag{26}$$

besitzt für $w \neq 0$ gerade n verschiedene Lösungen. Dazu bemerken wir, daß mit $\phi = \arg z \in [0, 2\pi[$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ auch

$$r\exp(\mathrm{i}\phi + 2\pi\mathrm{i}k) = r\exp(\mathrm{i}\phi)\exp(2\pi\mathrm{i}k) = r\exp(\mathrm{i}\phi)[\cos(2\pi k) + \mathrm{i}\sin(2\pi k)] = r\exp(\mathrm{i}\phi) = z \tag{27}$$

ist. Damit sind neben (25) auch alle Zahlen

$$w_k = \sqrt[n]{r}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right) \tag{28}$$

Lösungen der Gleichung (26). Dabei ist definitionsgemäß die n-te Wurzel einer reellen positiven Zahl als die positive Lösung der entsprechenden Gleichung eindeutig definiert. Voneinander verschiedene Lösungen der Form (28) gibt es aber nur für $k \in \{0, 1, \ldots, (n-1)\}$. Für $k = n$ erhält man wieder die Lösung w_0 usw. Im Spezialfall $z = 1$ ist offenbar $r = 1$ und $\phi = 0$. Dann ergeben sich die **n-ten Einheitswurzeln** gemäß (28) zu

$$w_k = \exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}k}{n}\right) \quad \text{mit} \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\}. \tag{29}$$

In der Gaußschen Zahlenebene bilden sie die auf dem Einheitskreis gelegenen Eckpunkte eines **regelmäßigen n-Ecks**, wobei einer der Eckpunkte auf der x-Achse bei $z = 1$ zu liegen kommt.

Für $n = 2$ sind die beiden Wurzeln für beliebiges $w \neq 0$ gemäß (28) durch

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{z} = \sqrt{r}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\phi}{2}\right), \\
w_1 &= \sqrt{r}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\phi + 2\pi\mathrm{i}}{2}\right) = \sqrt{r}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\phi}{2}\right)\exp(\mathrm{i}\pi) = -\sqrt{r}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\phi}{2}\right) = -w_0
\end{aligned} \tag{30}$$

gegeben, denn es ist $\exp(\mathrm{i}\pi) = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi) = -1$.

Beispielaufgaben

Im folgenden seien $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

i) Zeigen Sie in der Polardarstellung: $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2+n2\pi)}$.

   Lösung: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2+n2\pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n} = \cos(\pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/2) = 0 + \mathrm{i} = \mathrm{i}$.

ii) Zeigen Sie: $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

   Lösung: Setze ein $\cos(a+b) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a+b)})/2$ sowie $\cos(a) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a})/2$, $\cos(b) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b})/2$ und zeige die Identität durch Ausmultiplizieren.

iii) Zeigen Sie: $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi} = -1$.

   Lösung: $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi} = \cos(\pm\pi) + \mathrm{i}\sin(\pm\pi) = -1 + \mathrm{i}0 = -1$.

3 Differentialrechnung in einer reellen Variable

Sei x eine reelle kontinuierliche Variable und $f(x)$, $g(x)$ beliebige Funktionen. Dann ist die Ableitung von $f(x)$ durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{31}$$

definiert. Falls der Limes $\Delta x \to 0$ von (31) existiert, heißt f differenzierbar im Punkt x. Es gilt weiterhin für die Summe von zwei differenzierbaren Funktionen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x) + g(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x). \tag{32}$$

Für das Produkt zweier Funktionen gilt die **Produktregel**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right] g(x) + f(x) \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)\right] \tag{33}$$

und für einen Quotienten die **Quotientenregel**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \tag{34}$$

Für die Hintereinanderausführung von Abbildungen $f[g(x)]$, d.h. bilde erst x ab auf $g(x)$ und sodann das Ergebnis g auf $f(g)$, läßt sich die **Kettenregel**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f[g(x)] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g} f(g)\right]_{g=g(x)} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)\right] = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \tag{35}$$

anwenden. Höhere Ableitungen der Ordnung $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ sind durch

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} f(x)\right] \tag{36}$$

definiert.

Beispiele

i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = 2x$.

ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^a = ax^{a-1}$ für $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}x^m = \mathrm{e}^x$.

iv) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{i}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) = -\sin x + \mathrm{i}\cos x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x$
$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$

Für den natürlichen Logarithmus, definiert als Umkehrfunktion von e^x durch

$$\ln(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{\ln x} = x, \tag{37}$$

folgt mit $z = \mathrm{e}^x$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln(z)\right]\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln(z)\right]z = 1. \tag{38}$$

Damit haben wir die Ableitung des Logarithmus' zu

$$\frac{\mathrm{d}}{dz}\ln(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für} \quad z > 0 \tag{39}$$

bestimmt.

Beispiele zur Differentiation

Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen ($a_j,\ b_j,\ \phi \in \mathbb{R}$):

i) $f(x) = a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^{12}$
Lösung: $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 12a_4x^{11}$

ii) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ Lösung:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x(-\sin x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

.

iii) $f(x) = \cos^3(ax) \Rightarrow f'(x) = -3a\cos^2(ax)\sin(ax)$.

iv) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = (2x - 2x^3)\mathrm{e}^{-x^2}$.

v) Beweisen Sie die Quotientenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \tag{40}$$

Lösung: Schreibe $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)[g(x)]^{-1}$ und nutze die Produkt- und die Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\{f(x)[g(x)]^{-1}\} = f'(x)[g(x)^{-1}] - f(x)g'(x)[g(x)]^{-2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \tag{41}$$

4 Integralrechnung in einer reellen Variablen

Das Integral einer Funktion $f(x)$ über das Interval $[a, b]$ ist definiert als:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathrm{d}x \tag{42}$$

mit $\mathrm{d}x = (b-a)/n$ und $x_i = (i-1)\mathrm{d}x + a$. Die Funktion f heißt **integrabel** im Interval $[a, b]$, falls der Limes in (42) existiert.
Sei $F(x)$ die durch $F'(x) = f(x)$ definierte **Stammfunktion zu** $f(x)$. Dann gilt:

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b . \tag{43}$$

Beispiele

i) $f(x) = x^\lambda \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\lambda+1}x^{\lambda+1} + C$

ii) $f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x) + C$

iii) $f(x) = x^{-1} = 1/x \Rightarrow F(x) = \ln(x) + C$

iv) $f(x) = \ln(x) \Rightarrow F(x) = x[\ln(x) - 1] + C$

v) $f(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow F(x) = \mathrm{e}^x + C$
mit einer (hier reellen) beliebigen Konstanten C.

Additivität des Integrals:

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) + \int_b^c \mathrm{d}x\ f(x) = \int_a^c \mathrm{d}x\ f(x) \tag{44}$$

für $a \leq b \leq c$.

4.1 Partielle Integration

Die **partielle Integration** folgt aus der Produktregel für die Ableitung $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+ f(x)g'(x)$:

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ [f(x)g(x)]' = [f(x)g(x)]\Big|_a^b = \int_a^b \mathrm{d}x\ f'(x)g(x) + \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)g'(x) \tag{45}$$

oder

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ f'(x)g(x) = [f(x)g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)g'(x). \tag{46}$$

4.2 Beispiele zur partiellen Integration:

i)

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x\ x\sin(x)$$

.

Setze $f'(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$. Dann gilt nach Integration: $f(x) = -\cos(x)$, $g'(x) = 1$, also:

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x\ x\sin(x) = [-x\cos(x)]\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x(-\cos(x)1) = \sin(x)\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

ii)

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\ x\mathrm{e}^{-ax} = -\frac{x}{a}\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\ \frac{-1}{a}\mathrm{e}^{-ax} = 0 + \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-ax} = -\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a^2}$$

mit $f'(x) = \mathrm{e}^{-ax}$ und $g(x) = x$.

iii)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\ \ \sin(x)\mathrm{e}^{-ax} &= -\cos(x)\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\ (-\cos(x))(-a)\mathrm{e}^{-ax} \\
&= 1 - a\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\ \ \cos(x)\mathrm{e}^{-ax} \\
&= 1 - a[\sin(x)\mathrm{e}^{-ax}|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\ \ \sin(x)(-a)\mathrm{e}^{-ax}] \\
&= 1 - a^2\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\ \ \sin(x)\mathrm{e}^{-ax} \\
&\Rightarrow (1+a^2)\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\ \ \sin(x)\mathrm{e}^{-ax} = 1 \\
&\Rightarrow \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\ \ \sin(x)\mathrm{e}^{-ax} = 1/(1+a^2)
\end{aligned}$$

mit $f'(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \mathrm{e}^{-ax}$.

4.3 Die Substitutionsmethode

Die **Substitutionsmethode** beruht auf der Kettenregel der Differentiation:

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ f[g(x)] = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{\mathrm{d}z}{z'}\ f(z) \tag{47}$$

mit $z = g(x)$ und $z' = g'(x) = \frac{dg(x)}{\mathrm{d}x}$ oder (in alternativer Form)

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ g'(x)f[g(x)] = \int_a^b \mathrm{d}x\ \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}f[g(x)] = \int_{g(a)}^{g(b)} \mathrm{d}g\ f(g). \tag{48}$$

Beispiele für die Anwendung der Substitutionsmethode

Im folgenden seien $a, b \in \mathbb{R}$.

i) $\int_1^2 \mathrm{d}x\ x\sqrt{x^2+1} = ?$

Setze $z = x^2 + 1$. Dann ist $z' = 2x = \mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ oder $\mathrm{d}x = \mathrm{d}z/(2x)$. Die Grenzen sind: $z_a = z(1) = 2, z_b = z(2) = 5$. Dann gilt:

$$\int_1^2 \mathrm{d}x\ x\sqrt{x^2+1} = \int_{z_a}^{z_b} \frac{\mathrm{d}z}{2x}\ x\sqrt{z} = \frac{1}{2}\int_2^5 \mathrm{d}z\sqrt{z} = \frac{1}{3}z^{3/2}\Big|_2^5 = \frac{1}{3}(\sqrt{125} - \sqrt{8}).$$

ii) für $b > a$ ist

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ \frac{1}{x-a+1} = \int_1^{(b-a+1)} \frac{du}{u} = \ln(u)\Big|_1^{(b-a+1)} = \ln(b-a+1)$$

für $u = x - a + 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ u(a) = 1,\ u(b) = b - a + 1$

iii) $\int_0^3 \mathrm{d}x\ \sqrt{1+x} = \int_1^4 \mathrm{d}u\ \sqrt{u} = \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}(4^{3/2} - 1) = \frac{14}{3}$

für $u = x + 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ u(0) = 1,\ u(3) = 4$.

iv)

$$\int_0^b \mathrm{d}x\ \sinh(x)\cosh^m(x) = \int_{\cosh(0)}^{\cosh(b)} \mathrm{d}u\ u^m = \frac{1}{m+1}u^{(m+1)}\Big|_1^{\cosh(b)} \frac{1}{m+1}\left[\cosh^{(m+1)}(b) - 1\right]$$

für $u = \cosh(x) \ \Rightarrow\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x\sinh(x)$

v) für $b < \pi/2$:

$$\int_0^b \mathrm{d}x\ \tan(x) = \int_0^b \mathrm{d}x\ \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\int_{\cos(0)}^{\cos(b)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln(u)\Big|_1^{\cos(b)} = -\ln[\cos(b)]$$

mit $u = \cos(x) \ \Rightarrow \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x\sin(x)$

vi)

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x\ \sin(x)\cos^2(x) = -\int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} \mathrm{d}u\ u^2 = -\frac{1}{3}u^3\Big|_1^{-1} = \frac{2}{3}$$

für $u = \cos(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x\ \sin(x)$

vii) $b > \sqrt{2}$:

$$\int_{\sqrt{2}}^b \mathrm{d}x\ \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{3}{2}\int_0^{(b^2-2)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 3u^{1/2}\Big|_0^{(b^2-2)} = 3(b^2-2)^{1/2}$$

mit $u = x^2 - 2 \ \Rightarrow\ \mathrm{d}u = 2x\ \mathrm{d}x,\ u(\sqrt{2}) = 0,\ u(b) = b^2 - 2$.

5 Polynome

Ein **Polynom** ist eine endliche Reihe in x^n, d.h.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{49}$$

mit (im allgemeinenen) komplexen Koeffizienten a_i. Die Ordnung des Polynoms ist $n \in \mathbb{N}$, d.h. die höchste Potenz mit nicht verschwindendem Koeffizienten $a_n \neq 0$.

Von besonderem Interesse in vielen Problemen der Physik und Mathematik sind die **Nullstellen von** $f(x)$: Der **Fundamentalsatz der Algebra** sagt aus, daß ein Polynom der Ordnung n genau n Nullstellen $z_i(i = 1, .., n)$ in den komplexen Zahlen hat. Diese Aussage führt auf die explizite Darstellung

$$f(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x - z_i), \tag{50}$$

wobei die gleiche Nullstelle z_i mehrfach auftreten kann.

Beispiel

$$f(x) = (x - 1)^2(x - \mathrm{i})^3(x - \mathrm{i}\sqrt{2})^2$$

.

Das Polynom ist von der Ordnung $n = 7$, hat also 7 Nullstellen in den komplexen Zahlen. Hier treten die Nullstellen $z_{1/2} = 1$ zweifach, die Nullstelle $z_{3/4/5} = \mathrm{i}$ dreifach und die Nullstelle $z_{6/7} = \mathrm{i}\sqrt{2}$ zweifach auf.

Berechnung der Nullstellen von $f(x)$

i) $f(x) = x - a \;\Rightarrow\; z_1 = a$

ii) $f(x) = x^2 + px + q = 0$

Hier führt die Methode der „quadratischen Ergänzung“ zum Ziel. Dazu bemerken wir, daß $(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2/4$ (binomische Formel!) ist, d.h.

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \Rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Daraus ergeben sich durch Wurzelziehen die beiden Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Falls $p, q \in \mathbb{R}$, sind die Lösungen entweder beide reell falls $p^2/4 - q \geq 0$ ist. Falls $q = p^{/}4$, haben wir die doppelte Nullstelle $x_1 = x_2$. Für $p^2/4 - q < 0$ haben wir zwei einfache zueinander konjugiert komplexe Nullstellen.

iii) Es ist ein berühmtes Resultat der Algebra, daß i.a. für Polynome bis einschließlich 4. Grades geschlossene Lösungsformeln ähnlich der Lösungsformel für die quadratischen Gleichung existieren. Diese sind aber sehr unübersichtlich. Daher ist es i.a. sinnvoller, solche Polynomgleichungen numerisch zu lösen. In einfachen Fällen können wir eine Nullstelle z_1 erraten und dann einen Linearfaktor $x - z_1$ ausklammern. Der andere Faktor ist dann ein Polynom von einem um 1 geringeren Grad, und wir können versuchen, die übrigen Nullstellen dieses Polynoms zu berechnen usw.