Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Wintersemester 2015/2016**

Übungen zur Nichtgleichgewichtsthermodynamik – Blatt 5

Aufgabe: Entropie und H-Theorem

Betrachten Sie ein ideales Quantengas in einem großen aber endlichen Würfel mit der Kantenlänge l.

(a) Lösen Sie das Eigenwertproblem für den Impulsoperator[1] $\vec{\mathbf{p}} = -\mathrm{i}\vec{\nabla}$ für ein Teilchen. Nehmen Sie dazu periodische Randbedingungen für die Wellenfunktionen $\psi(\vec{x} + l\vec{e}_j) = \psi(\vec{x})$ für $j \in \{1,2,3\}$ ($\vec{e}_j$: kartesische Basis) an.

(b) Wieviele Einteilchenzustände G_j kommen auf ein Phasenraumvolumen $l^3 \Delta^3 \vec{p}$ in der Umgebung eines Impulswertes $\vec{p}_j$?

(c) Berechnen Sie nun das statistische Gewicht Γ_j für den Vielteilchenzustand von ununterscheidbaren Bosonen bzw. Fermionen, der durch die Besetzungszahlen N_j charakterisiert ist.

Hinweis: Die Lösungen sind

$$\Gamma_j = \binom{G_j}{N_j} \quad \text{für Fermionen,} \tag{1}$$

$$\Gamma_j = \binom{G_j + N_j - 1}{N_j} \quad \text{für Bosonen.} \tag{2}$$

Im folgenden gehen wir davon aus, daß die Phasenraumzellen „mikroskopisch" groß sind, d.h. die G_j große Zahlen sind (ebenso die N_j), so daß bei den weiteren Rechnungen für die Fakultäten die Sterling-Formel

$$\ln N! \underset{N \to \infty}{\cong} N(\ln N - 1) \tag{3}$$

verwendet werden kann.

(d) Die Entropie des Systems ist dann durch

$$S = \sum_j \ln \Gamma_j \tag{4}$$

gegeben. Berechnen Sie die Entropie für Fermionen und Bosonen. Drücken Sie die entsprechenden Formeln durch die Phasenraumdichte

$$f(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{N_j}{G_j} \tag{5}$$

aus, indem Sie zum Limes sehr großer l übergehen, so daß die Summen über die Impulse durch entsprechende Integrale ersetzt werden können.

(e) Leiten Sie daraus die Gleichgewichtsverteilungen für Bosonen und Fermionen aus dem Prinzip der maximalen Entropie her.

[1] Wir rechnen in „natürlichen Einheiten" mit $\hbar = k_{\mathrm{B}} = 1$.

(f) Betrachten Sie nun die Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck-Gleichung, die wir in der Vorlesung hergeleitet haben (oberes Vorzeichen für Bosonen, unteres für Fermionen):

$$\begin{aligned}\partial_t f(t,\vec{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}\,'}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{(2\pi)^3}\left|\frac{\tilde{V}(\vec{q})}{2}\right|^2 2\pi\delta\left[\frac{1}{2m}[(\vec{p}+\vec{q})^2+(\vec{p}\,'-\vec{q})^2-\vec{p}^2-\vec{p}\,'^2]\right] \\ \times\Big[f(t,\vec{p}+\vec{q})f(t,\vec{p}\,'-\vec{q})[1\pm f(t,\vec{p})][1\pm f(t,\vec{p}\,')] \\ -f(t,\vec{p})f(t,\vec{p}\,')[1\pm f(t,\vec{p}+\vec{q})][1\pm f(t,\vec{p}\,'-\vec{q})]\Big],\end{aligned} \tag{6}$$

wobei

$$\tilde{v}(\vec{q}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, v(\vec{x})\exp(-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}) \tag{7}$$

die Fourier-Transformierte des Zweiteilchenwechselwirkungspotentials und $\vec{q} = \vec{k}_3 - \vec{k}_1$ den Impulsübertrag beim Zweiteilchenstoß bezeichnen.

Leiten Sie daraus aus den Ausdrücken für die jeweilige Gesamtentropie das Boltzmannsche H-Theorem her, d.h.

$$\dot{S}(t) \geq 0. \tag{8}$$

Hinweis: Die analoge Rechnung für klassische Teilchen finden Sie in Landau und Lifschitz, Theoretische Physik, Bd. X (Kinetik) oder in meinem Skript zur Transporttheorie:

http://fias.uni-frankfurt.de/ ~ hees/publ/kolkata.pdf

(g) Zeigen Sie, daß für die oben gefundenen Gleichgewichtsverteilungen tatsächlich $\partial_t f = 0$ und $\dot{S} = 0$ gilt.