

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 6

Aufgabe 1: Rechnen mit komplexen Zahlen

Es seien $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 3 + 4i$. Berechnen Sie

- $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ und z_1/z_2 .
 - Berechnen Sie jeweils den Betrag und das Argument für $z_1 = r_1 \exp(i\varphi_1)$ und $z_2 = r_2 \exp(i\varphi_2)$, wobei $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi, \pi]$.
 - Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mit $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Man nennt diese Lösungen die „komplexen n -ten Einheitswurzeln“.
-

Aufgabe 2: Trigonometrische Funktionen und exp-Funktion

- Verwenden Sie die Eulersche Formel $\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$, um die Additionstheoreme für \cos und \sin herzuleiten.
- Es sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie nun $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ als Punkt in der Gaußschen (x, y) -Zahlenebene. Was bedeutet dann die Abbildung $z \rightarrow z' = z \exp(i\varphi)$.

Tip: Die Aufgabe wird besonders einfach lösbar, wenn man die Polarform $z = r \exp(i\varphi_z)$ verwendet.

Aufgabe 3: Potenzreihe

Gegeben sei die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ mit $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Potenzreihe und deren Konvergenzradius. Bestimmen Sie den Definitionsbereich bzw. die Singularitäten von f und diskutieren Sie, was dies mit dem Konvergenzradius zu tun haben könnte.