H. van Hees **Sommersemester 2020**

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 6

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Rechnen mit komplexen Zahlen
Es seien $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ und $z_2 = 3 + 4\mathrm{i}$. Berechnen Sie

(a) **[4 Punkte]** $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ und z_1/z_2.

(b) **[4 Punkte]** Berechnen Sie jeweils den Betrag und das Argument für $z_1 = r_1 \exp(\mathrm{i}\varphi_1)$ und $z_2 = r_2 \exp(\mathrm{i}\varphi_2)$, wobei $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi, \pi]$.

(c) **[2 Punkte]** Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mit $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Man nennt diese Lösungen die „komplexen n-ten Einheitswurzeln".

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Trigonometrische Funktionen und exp-Funktion

(a) **[6 Punkte]** Verwenden Sie die Eulersche Formel $\exp(\mathrm{i}\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, um die Additionstheoreme für cos und sin herzuleiten.

(b) **[4 Punkte]** Es sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie nun $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ als Punkt in der Gaußschen (x, y)-Zahlenebene. Was bedeutet dann die Abbildung $z \to z' = z \exp(\mathrm{i}\varphi)$.

Tip: Die Aufgabe wird besonders einfach lösbar, wenn man die Polarform $z = r \exp(\mathrm{i}\varphi_z)$ verwendet.

Aufgabe 3 [5 Punkte]: Potenzreihe
Gegeben sei die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ mit $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Potenzreihe und deren Konvergenzradius. Bestimmen Sie den Definitionsbereich bzw. die Singularitäten von f und diskutieren Sie, was dies mit dem Konvergenzradius zu tun haben könnte.