H. van Hees **Sommersemester 2020**

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 12

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Berechnen einer Determinante

Betrachten Sie die Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Berechnen Sie die Determinante

(a) **[4 Punkte]** mit dem Determinantenentwicklungssatz durch Entwicklung nach der ersten Zeile,

(b) **[3 Punkte]** als Spatprodukt der Spaltenvektoren,

(c) **[3 Punkte]** indem Sie die Matrix zunächst durch Gaußelimination auf obere Dreiecksgestalt bringen.

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Transformationsverhalten des Vektorprodukts

Hinweis: In dieser Aufgabe verwenden wir die Einsteinsche Summationskonvention, d.h. über in einer Gleichung doppelt auftretende Indizes wird stets von 1 bis 3 summiert!

Wir wollen zeigen, dass sich die kartesischen Komponenten des Vektors

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \tag{2}$$

unter einem orthogonalen Basiswechsel mit der Drehmatrix $\hat{O}$

$$\vec{e}_j = O_{kj} \vec{e}'_k, \tag{3}$$

wie kartesische Vektorkomponenten transformieren. Sie dürfen dazu verwenden, dass die Drehmatrix orthogonal, d.h. dass

$$\hat{O}^{\mathrm{T}} \hat{O} = \hat{O} \hat{O}^{\mathrm{T}} = \mathbb{1}_3 \tag{4}$$

gilt und orientierungserhaltend ist, d.h. es ist

$$\det \hat{O} = +1. \tag{5}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) **[4 Punkte]** Zeigen Sie, dass aus (3) für die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzgl. der beiden Basen die Beziehung

$$a'_k = O_{kj} a_j, \quad b'_k = O_{kj} b_j \tag{6}$$

folgt.

(b) **[6 Punkte]** Verwenden Sie diese Transformationsformeln nun in der Formel für die Komponenten des Vektorprodukts

$$c'_j = \epsilon_{jkl} a'_k b'_l, \tag{7}$$

um daraus herzuleiten, dass

$$c'_j = O_{jk} c_k \tag{8}$$

gilt, wobei

$$c_k = \epsilon_{klm} a_l b_m \tag{9}$$

ist, d.h. in Matrix-Vektor-Schreibweise gilt

$$\underline{a}' \times \underline{b}' = (\hat{O}\underline{a}) \times (\hat{O}\underline{b}) = \hat{O}(\underline{a} \times \underline{b}). \tag{10}$$

(c) (Knobelaufgabe) **[2 Extrapunkte]** Wie verhält sich das Skalarprodukt zweier Vektoren unter Raumspiegelungen. Die Raumspiegelung entspricht dabei der Transformation $\vec{a} \rightarrow -\vec{a}$.