Taylor-Reihen

Hendrik van Hees

Goethe University Frankfurt

Sommersemester 2020

Zwischenwertsatz der Integralrechnung

- f: im Intervall $[x_0, x_1]$ stetige Funktion
- Satz: Es gibt ein $\xi \in [x_0, x_1]$, so dass

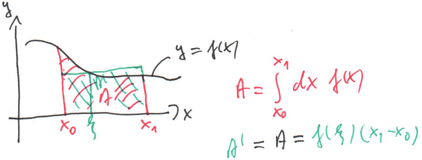
$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x\, f(x) = f(\xi)(x_1 - x_0) \tag{1}$$

Zwischenwertsatz der Integralrechnung

- f: im Intervall $[x_0, x_1]$ stetige Funktion
- Satz: Es gibt ein $\xi \in [x_0, x_1]$, so dass

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x\, f(x) = f(\xi)(x_1 - x_0) \tag{1}$$

- anschaulicher „Beweis“:



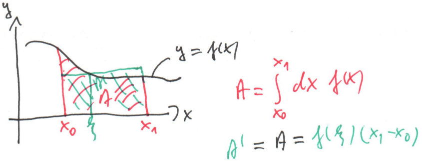
- das Integral entspricht der rot schraffierten Fläche A

Zwischenwertsatz der Integralrechnung

- f: im Intervall $[x_0, x_1]$ stetige Funktion
- Satz: Es gibt ein $\xi \in [x_0, x_1]$, so dass

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x\, f(x) = f(\xi)(x_1 - x_0) \tag{1}$$

- anschaulicher „Beweis“:



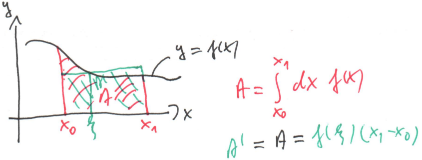
- das Integral entspricht der rot schraffierten Fläche A
- finde Rechteck, so dass dessen grün schraffierte Fläche $A' = A$ ist

Zwischenwertsatz der Integralrechnung

- f: im Intervall $[x_0, x_1]$ stetige Funktion
- Satz: Es gibt ein $\xi \in [x_0, x_1]$, so dass

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x\, f(x) = f(\xi)(x_1 - x_0) \tag{1}$$

- anschaulicher „Beweis“:



- das Integral entspricht der rot schraffierten Fläche A
- finde Rechteck, so dass dessen grün schraffierte Fläche $A' = A$ ist
- da f in $[x_1, x_2]$ stetig, gibt es stets ein ξ, so dass die Höhe des grünen Rechtecks gleich $f(\xi)$ ist.

Taylor-Reihe

- f: im Intervall $[x_0, x_1]$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar
- sei $a \in [x_0, x_1]$ fest gegeben und $x \in [x_0, x_1]$ beliebig wählbar
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \mathrm{d}x' f'(x') \tag{2}$$

Taylor-Reihe

- f: im Intervall $[x_0, x_1]$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar
- sei $a \in [x_0, x_1]$ fest gegeben und $x \in [x_0, x_1]$ beliebig wählbar
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \mathrm{d}x' f'(x') \tag{2}$$

- partielle Integration mit $u'(x') = 1$ und $v(x') = f'(x') \Rightarrow \quad u(x') = x' - x$, $v'(x') = f''(x')$:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) - \int_a^x \mathrm{d}x' (x'-x) f''(x'). \tag{3}$$

Taylor-Reihe

- f: im Intervall $[x_0, x_1]$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar
- sei $a \in [x_0, x_1]$ fest gegeben und $x \in [x_0, x_1]$ beliebig wählbar
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \mathrm{d}x' f'(x') \tag{2}$$

- partielle Integration mit $u'(x') = 1$ und $v(x') = f'(x') \Rightarrow \quad u(x') = x' - x$, $v'(x') = f''(x')$:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) - \int_a^x \mathrm{d}x' (x'-x) f''(x'). \tag{3}$$

- nochmal partielle Integration mit $u'(x') = (x'-x)$ und $v(x') = f''(x') \Rightarrow$ $u(x') = (x'-x)^2/2$ und $v'(x') = f^{(3)}(x')$:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \int_a^x \mathrm{d}x' \frac{(x'-x)^2}{2} f^{(3)}(x'). \tag{4}$$

Taylor-Reihe

- wiederhole das noch insgesamt weitere $(n-2)$-mal:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underbrace{(-1)^n \int_a^x \mathrm{d}x' \frac{(x'-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x')}_{R_n(x,a)}. \tag{5}$$

Taylor-Reihe

- wiederhole das noch insgesamt weitere $(n-2)$-mal:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underbrace{(-1)^n \int_a^x \mathrm{d}x' \frac{(x'-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x')}_{R_n(x,a)}. \tag{5}$$

- „Restglied“ mit Mittelwertsatz ($f^{(n+1)}$ voraussetzungsgemäß stetig!)

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(\xi - x)^n (x-a), \quad \xi \in [a,x] \quad \text{bzw.} \quad [x,a]. \tag{6}$$

(Restgliedformel von Cauchy)

Taylor-Reihe

- wiederhole das noch insgesamt weitere $(n-2)$-mal:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\underbrace{(-1)^n\int_a^x \mathrm{d}x'\frac{(x'-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x')}_{R_n(x,a)}. \tag{5}$$

- „Restglied“ mit Mittelwertsatz ($f^{(n+1)}$ voraussetzungsgemäß stetig!)

$$R_n(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(\xi-x)^n(x-a), \quad \xi\in[a,x] \quad \text{bzw.} \quad [x,a]. \tag{6}$$

  (Restgliedformel von Cauchy)

- Wenn f beliebig oft stetig differenzierbar und $R_n(x,a)\to 0$ für $n\to\infty$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k. \tag{7}$$

Beispiel: Exponentialfunktion

- sei $f(x) = \exp x$; ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert
- Sei $x_0 = [-b, b]$ mit $b > 0$ beliebig und $a = 0$

Beispiel: Exponentialfunktion

- sei $f(x) = \exp x$; ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert
- Sei $x_0 = [-b, b]$ mit $b > 0$ beliebig und $a = 0$
- $f^{(k)}(x) = \exp x$ für alle $k \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$

Beispiel: Exponentialfunktion

- sei $f(x) = \exp x$; ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert
- Sei $x_0 = [-b, b]$ mit $b > 0$ beliebig und $a = 0$
- $f^{(k)}(x) = \exp x$ für alle $k \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$
- damit Taylor-Formel

$$\exp x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \exp(\xi)(\xi - x)^n x, \quad x \in [-b, b] \tag{8}$$

Beispiel: Exponentialfunktion

- sei $f(x) = \exp x$; ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert
- Sei $x_0 = [-b, b]$ mit $b > 0$ beliebig und $a = 0$
- $f^{(k)}(x) = \exp x$ für alle $k \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$
- damit Taylor-Formel

$$\exp x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \exp(\xi)(\xi - x)^n x, \quad x \in [-b, b] \tag{8}$$

- Restgliedabschätzung: Es ist ξ zwischen x und 0 und $x \in [-b, b]$ und daher

$$|R_n(x, 0)| = \frac{1}{n!} \exp(\xi)|\xi - x|^n |x| \leq \frac{1}{n!} b^n b \exp b. \tag{9}$$

Beispiel: Exponentialfunktion

- sei $f(x) = \exp x$; ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert
- Sei $x_0 = [-b, b]$ mit $b > 0$ beliebig und $a = 0$
- $f^{(k)}(x) = \exp x$ für alle $k \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$
- damit Taylor-Formel

$$\exp x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \exp(\xi)(\xi - x)^n x, \quad x \in [-b, b] \tag{8}$$

- Restgliedabschätzung: Es ist ξ zwischen x und 0 und $x \in [-b, b]$ und daher

$$|R_n(x, 0)| = \frac{1}{n!} \exp(\xi) |\xi - x|^n |x| \leq \frac{1}{n!} b^n b \exp b. \tag{9}$$

- $R_n(x, 0) \to 0$ für $n \to \infty$
- Potenzreihe für Exponentialfunktion

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots \tag{10}$$

Beispiel: Geometrische Reihe

- $f(x) = 1/(1-x)$, überall beliebig oft stetig differenzierbar außer in $x = 1$, wo f undefiniert ist

Beispiel: Geometrische Reihe

- $f(x) = 1/(1-x)$, überall beliebig oft stetig differenzierbar außer in $x = 1$, wo f undefiniert ist
- Taylor-Reihe um $a = 0$; wähle $[x_0, x_1] = [-b, b]$ mit $0 < b < 1$
- Dann Taylor-Formel gültig. Benötige

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = 2\frac{1}{(1-x)^3}, \ldots, f^{(k)}(x) = k!\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \Rightarrow f^{(k)}(0) = k! \tag{11}$$

Beispiel: Geometrische Reihe

- $f(x) = 1/(1-x)$, überall beliebig oft stetig differenzierbar außer in $x = 1$, wo f undefiniert ist
- Taylor-Reihe um $a = 0$; wähle $[x_0, x_1] = [-b, b]$ mit $0 < b < 1$
- Dann Taylor-Formel gültig. Benötige

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = 2\frac{1}{(1-x)^3}, \ldots, f^{(k)}(x) = k!\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \Rightarrow f^{(k)}(0) = k! \tag{11}$$

- Taylor-Formel

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^n + (n+1)x \frac{(\xi - x)^n}{(1-\xi)^{n+2}} \tag{12}$$

Beispiel: Geometrische Reihe

- $f(x) = 1/(1-x)$, überall beliebig oft stetig differenzierbar außer in $x = 1$, wo f undefiniert ist
- Taylor-Reihe um $a = 0$; wähle $[x_0, x_1] = [-b, b]$ mit $0 < b < 1$
- Dann Taylor-Formel gültig. Benötige

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = 2\frac{1}{(1-x)^3}, \ldots, f^{(k)}(x) = k!\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \Rightarrow f^{(k)}(0) = k! \tag{11}$$

- Taylor-Formel

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^n + (n+1)x\frac{(\xi - x)^n}{(1-\xi)^{n+2}} \tag{12}$$

- Restgliedabschätzung:

$$|R_n(x,0)| \leq |x|\frac{n+1}{|1-\xi|^2}\left(\frac{|\xi - x|}{|1-\xi|}\right)^n \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \tag{13}$$

- für $|x| < 1$ ist also

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k. \tag{14}$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe

- betrachte beliebige Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{15}$$

- Majorantenkriterium für absolute Konvergenz mit geometrischer Reihe als Vergleichsreihe:
- falls es Zahl q mit $0 < q < 1$ gibt, so dass $|c_k x^k| < q^k$ für $k > n$ mit einem beliebigen $n \in \mathbb{N}$, dann Reihe absolut konvergent

Konvergenzradius einer Potenzreihe

- betrachte beliebige Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{15}$$

- Majorantenkriterium für absolute Konvergenz mit geometrischer Reihe als Vergleichsreihe:
- falls es Zahl q mit $0 < q < 1$ gibt, so dass $|c_k x^k| < q^k$ für $k > n$ mit einem beliebigen $n \in \mathbb{N}$, dann Reihe absolut konvergent
- Beweis: sei $m > n$

$$\begin{aligned} s_m = \sum_{k=0}^{m} |c_k x^k| &= \sum_{k=0}^{n} |c_k x^k| + \sum_{k=n+1}^{m} |c_k x^k| \\ &< \sum_{k=0}^{n} |c_k x^k| + \sum_{k=n+1}^{m} q^k \\ &< \sum_{k=0}^{n} |c_k x^k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k \end{aligned} \tag{16}$$

- s_m ist monoton wachsende nach oben beschränkte Folge $\Rightarrow$ s_m konvergiert für $m \to \infty$

Konvergenzradius einer Potenzreihe

- falls

$$\lim_{n \to \infty} |c_k x^k|^{1/k} = |x| \lim_{n \to \infty} |c_k|^{1/k} = q < 1 \tag{17}$$

ist Vergleichskriterium erfüllt $\Rightarrow$ Potenzreihe konvergiert absolut für $|x| < R$ mit

$$R = \frac{1}{\lim_{k \to \infty} |c_k|^{1/k}}. \tag{18}$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe

- falls
$$\lim_{n \to \infty} |c_k x^k|^{1/k} = |x| \lim_{n \to \infty} |c_k|^{1/k} = q < 1 \tag{17}$$
ist Vergleichskriterium erfüllt $\Rightarrow$ Potenzreihe konvergiert absolut für $|x| < R$ mit
$$R = \frac{1}{\lim_{k \to \infty} |c_k|^{1/k}}. \tag{18}$$

- alternative Formel für R
- falls
$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{c_{k+1} x^{k+1}}{c_k x^k} \right| = |x| \lim_{k \to \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| < 1 \tag{19}$$
Vergleichskriterium erfüllt $\Rightarrow$ Potenzreihe absolut konvergent für $|x| < R$ mit
$$R = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \tag{20}$$

Sätze über Potenzreihen (ohne Beweise)

- Sei
$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{21}$$
absolut konvergente Potenzreihe it Konvergenzradius R (R kann auch ∞ sein; dann Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent!)
- dann
  - f im Intervall $x \in (-R, R)$ beliebig oft stetig differenzierbar
  - Ableitung und Summenbildung dürfen vertauscht werden, d.h. es gilt
  $$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} \tag{22}$$
  - Integration darf mit Summenbildung vertauscht werden, d.h.
  $$\int_0^x \mathrm{d}x' f(x')=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{k+1} x^{k+1}. \tag{23}$$
  - Reihen für Ableitung und Integral: gleicher Konvergenzradius R

Sätze über Potenzreihen (ohne Beweise)

- Sei
$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{21}$$
absolut konvergente Potenzreihe it Konvergenzradius R (R kann auch ∞ sein; dann Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent!)
- dann
  - f im Intervall $x \in (-R, R)$ beliebig oft stetig differenzierbar
  - Ableitung und Summenbildung dürfen vertauscht werden, d.h. es gilt
$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} \tag{22}$$
  - Integration darf mit Summenbildung vertauscht werden, d.h.
$$\int_0^x \mathrm{d}x' f(x')=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{k+1} x^{k+1}. \tag{23}$$
  - Reihen für Ableitung und Integral: gleicher Konvergenzradius R
- für $x=z \in \mathbb{C}$ definiert Potenzreihe ebenfalls beliebig oft stetig differenzierbare Funktion für $|z|<R$
- falls R endlich, besitzt f oder eine ihrer Ableitungen auf dem Kreis $|z|=R$ eine Singularität