Transformationsverhalten des Kreuzprodukts unter Drehungen

Hendrik van Hees

Goethe University Frankfurt

Sommersemester 2020

Drehung als Basistransformation

- Drehung: Drehmatrix $\hat{D} = (D_{jk}) \Leftrightarrow \hat{D}^{\mathrm{T}} = \hat{D}^{-1}, \quad \det \hat{D} = 1$
- $\Rightarrow \hat{D} \in \mathrm{SO}(3)$ (spezielle orthogonale Matrizen/Gruppe)
- $\vec{e}_j$ und $\vec{e}'_k$ rechtshändige Orthonormalbasen (kartesische Basen)
- im Folgenden Einstein-Summenkonvention: Über gleichnamige Indexpaare wird summiert!

$$\vec{e}'_k = \sum_j \vec{e}_j D_{jk} \equiv \vec{e}_j D_{jk}.$$

- beliebiger Vektor

$$\vec{x} = x'_k \vec{e}'_k = x'_k \vec{e}_j D_{jk} = (\hat{D}\,\underline{x}')_j \vec{e}_j \;\Rightarrow\; x_j = D_{jk} x'_k \;\Leftrightarrow\; \underline{x} = \hat{D}\,\underline{x}'$$

- Umkehrtransformation: $\underline{x}' = \hat{D}^{\mathrm{T}} \underline{x} \Leftrightarrow x'_k = (D^{\mathrm{T}})_{kj} x_j = D_{jk} x_j$.

Kreuzprodukt

- Kreuzprodukt
$$\vec{a} \times \vec{b} = a'_k \vec{e}'_k \times b'_l \vec{e}'_l = (\vec{e}'_k \times \vec{e}'_l) a'_k b'_l$$
- $\vec{e}'_k$ rechtshändige Orthonormalbasis
$$\vec{e}'_k \times \vec{e}'_l = \epsilon_{klm} \vec{e}'_m$$
- Vektorprodukt
$$\vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{klm} a'_k b'_l \vec{e}'_m$$
- Umrechnung in Basis $\vec{e}_j$:
$$\vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{klm} D_{ak} a_a D_{bl} b_b D_{cm} \vec{e}_c = (\epsilon_{klm} D_{ak} D_{bl} D_{cm}) a_a b_b \vec{e}_c$$
- Ausdruck in Klammer
$$\epsilon_{klm} D_{ak} D_{bl} D_{cm} = \epsilon_{abc} \det \hat{D} = \epsilon_{abc}$$
- Vektorprodukt
$$\vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{abc} a_a b_b \vec{e}_c$$
- in Matrix-Vektorschreibweise haben wir gezeigt, dass
$$\underline{a} \times \underline{b} = (\hat{D} \underline{a}') \times (\hat{D} \underline{b}') = \hat{D} (\underline{a}' \times \underline{b}')$$