

## Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 11

---

### Aufgabe 1 [10 Punkte]: Runge-Lenz-Vektor

Wir betrachten die Relativbewegung des Keplerproblems der Bewegung eines Planeten um die Sonne. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{m_{\text{P}} m_{\text{S}}}{m_{\text{P}} + m_{\text{S}}}, \quad \alpha = \gamma m_{\text{P}} m_{\text{S}}. \quad (1)$$

- (a) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass der **Runge-Lenz-Vektor**

$$\vec{Q} = \frac{1}{\alpha} \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \frac{\vec{r}}{r} \quad (2)$$

eine Erhaltungsgröße ist, indem Sie zeigen, dass  $\dot{\vec{Q}} = \vec{0}$  ist. Dabei ist  $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{const}$  der erhaltene Bahndrehimpuls der Relativbewegung.

**Hinweis:** Für die Rechnung ist folgende Überlegung nützlich: Aus  $r = |\vec{r}|$  folgt  $r^2 = \vec{r}^2$ . Bilden wir davon die Zeitableitung, folgt

$$\frac{d}{dt} r^2 = 2r \dot{r} = \frac{d}{dt} \vec{r}^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = 2\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \Rightarrow r \dot{r} = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}. \quad (3)$$

- (b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass aus  $\vec{r} \cdot \vec{Q} = rQ \cos \varphi$  wieder das erste Keplersche Gesetz, also die Ellipsenbahn für  $\vec{r}$  folgt.
- (c) (2 Punkte) Welche Richtung hat demnach der Runge-Lenz-Vektor?
- (d) (2 Punkte) Was ist  $|\vec{Q}|$ ?

**Hinweis:** Für die ganze Aufgabe ist auch die „bac-cab-Formel“ sehr nützlich:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Ebenso kann man die Formel  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  gebrauchen.