H. van Hees **Wintersemester 2018/2019**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 5

Aufgabe 1: Runge-Lenz-Vektor

Wir betrachten die Relativbewegung des Keplerproblems der Bewegung eines Planeten um die Sonne. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{m_\text{P} m_\text{S}}{m_\text{P} + m_\text{S}}, \quad \alpha = \gamma m_\text{P} m_\text{S}. \tag{1}$$

(a) Beweisen Sie, dass der **Runge-Lenz-Vektor**

$$\vec{Q} = \frac{1}{\alpha}\dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \frac{\vec{r}}{r} \tag{2}$$

eine Erhaltungsgröße ist, indem Sie zeigen, dass $\dot{\vec{Q}} = \vec{0}$ ist. Dabei ist $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{const}$ der erhaltene Bahndrehimpuls der Relativbewegung.

Hinweis: Für die Rechnung ist folgende Überlegung nützlich: Aus $r = |\vec{r}|$ folgt $r^2 = \vec{r}^2$. Bilden wir davon die Zeitableitung, folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r^2 = 2r\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}^2 = \dot{\vec{r}}\vec{\nabla}(\vec{r}^2) = 2\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \Rightarrow r\dot{r} = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}. \tag{3}$$

(b) Zeigen Sie, dass aus $\vec{r} \cdot \vec{Q} = rQ\cos\varphi$ wieder das erste Keplersche Gesetz, also die Ellipsenbahn für $\vec{r}$ folgt.

(c) Welche Richtung hat demnach der Runge-Lenz-Vektor?

(d) Was ist $|\vec{Q}|$?

Hinweis: Für die ganze Aufgabe ist auch die „bac-cab-Formel ebenfalls sehr nützlich:
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
Ebenso kann man die Formel $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ gebrauchen.