Zweiteilchensystem (Skript 3.5.3)

$$L = T - V = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{x}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{x}}_2^{\,2} - V(r) \quad \text{mit } r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$$

Checke, dass Galileisymmetrien gelten:

Zeittranslationsinvarianz: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ✓

Erhaltungsgröße ist Hamilton-Funktion. Kanonische Impulse:

$$\vec{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_1} = m_1 \dot{\vec{x}}_1, \quad \vec{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_2} = m_2 \dot{\vec{x}}_2$$

$\Rightarrow$ hier sind kan. Impulse die gewöhnlichen Impulse.

$$H = \dot{\vec{x}}_1 \cdot \vec{p}_1 + \dot{\vec{x}}_2 \cdot \vec{p}_2 - L = T + V = E$$

Räumliche Translationen

$$\vec{x}_1{}' = \vec{x}_1 + \vec{a}, \quad \vec{x}_2{}' = \vec{x}_2 + \vec{a}, \quad \vec{a} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}_1{}' = \dot{\vec{x}}_1, \quad \dot{\vec{x}}_2{}' = \dot{\vec{x}}_2 \quad \Rightarrow T \text{ invariant}$$

$$V' = V(r') = V(|\vec{x}_1{}' - \vec{x}_2{}'|) = V(|\vec{x}_1 + \cancel{\vec{a}} - (\vec{x}_2 + \cancel{\vec{a}})|)$$

$$= V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = V(r) \Rightarrow V \text{ invariant}$$

Mit (3.5.15) folgt, dass Gesamtimpuls

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

erhalten ist. Mit EL-Gln.:

$$\dot{\vec{P}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_2} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_1} + \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_2}$$

$$= -V'(r)\left[\frac{\partial r}{\partial \vec{x}_1} + \frac{\partial r}{\partial \vec{x}_2}\right] = -V'(r)\left[\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|}\right]$$

$$= 0 \checkmark$$

Drehungen $\Rightarrow$ Drehimpulserhaltung (erfüllt, weil L nur aus Skalaren zusammenges.)

$$\vec{l} = \vec{x}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{x}_2 \times \vec{p}_2 = m_1 \vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{l}} = \cancel{\dot{\vec{x}}_1 \times \vec{p}_1} + \vec{x}_1 \times \dot{\vec{p}}_1 + \cancel{\dot{\vec{x}}_2 \times \vec{p}_2} + \vec{x}_2 \times \dot{\vec{p}}_2$$

$$= -\vec{x}_1 \times \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_1} - \vec{x}_2 \times \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_2}$$

$$= -V'(r)\left[\vec{x}_1 \times \frac{\cancel{\vec{x}_1} - \vec{x}_2}{r} + \vec{x}_2 \times \frac{\cancel{\vec{x}_2} - \vec{x}_1}{r}\right]$$

$$= -\frac{V'(r)}{r}\Big[-\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 - \underbrace{\vec{x}_2 \times \vec{x}_1}_{-\vec{x}_1 \times \vec{x}_2}\Big] = 0$$

Galileiboost

$$\vec{x}_1' = \vec{x}_1 - \vec{w}\, t, \quad \vec{x}_2' = \vec{x}_2 - \vec{w}\, t$$

$$\dot{\vec{x}}_1' = \dot{\vec{x}}_1 - \vec{w}, \quad \dot{\vec{x}}_2' = \dot{\vec{x}}_2 - \vec{w}$$

$$T' = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{x}}_1'^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}_2'^2$$

$$= \frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec{x}}_1^2 + 2\vec{w}\cdot\dot{\vec{x}}_1 + \vec{w}^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + 2\vec{w}\cdot\dot{\vec{x}}_2 + \vec{w}^2\right)$$

$$= T + \vec{w}\cdot\left(m_1 \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2\right) + \frac{m_1 + m_2}{2} \vec{w}^2$$

$$V' = V(|\vec{x}_1' - \vec{x}_2'|) = V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = V$$

$$\Rightarrow L' = L(\vec{x}_1', \vec{x}_2', \dot{\vec{x}}_1', \dot{\vec{x}}_2') = T' - V'$$

$$= T - V + \vec{w}\cdot\left(m_1 \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2\right) + \frac{m_1 + m_2}{2}\vec{w}^2$$

$$= L + \frac{d}{dt}\left[\vec{w}\cdot\left(m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2\right) + \frac{m_1 + m_2}{2}\vec{w}^2 t\right]$$

$$= L + \frac{d}{dt}\Omega(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$$

$\Rightarrow$ L' ist äquivalent zu L $\Rightarrow$ Galileiboost ist Symm.

Erhaltungsgröße aus (3.5.15):

$$\vec{K} = M\vec{X} - \vec{P}t \quad \text{mit } M = m_1 + m_2$$

und $$\vec{X} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{M} \quad \text{(Schwerpunktsvektor)}$$

$\vec{P}$ erhalten (s.o.)

Bew.: $$\dot{\vec{K}} = M\dot{\vec{X}} - \cancel{\dot{\vec{P}}t} - \vec{P}$$

$$= \underbrace{m_1\dot{\vec{x}}_1 + m_2\dot{\vec{x}}_2}_{\vec{P}} - \vec{P}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ Geeignete neue Koordinaten:

$$\vec{X} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{M}$$

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$$

Um Lagrangefunktion umzuschreiben brauchen wir $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ als Funktionen von $\vec{X}$ und $\vec{r}$:

$$\vec{X} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2(\vec{x}_1 - \vec{r})}{M}$$

$$= \vec{x}_1 - \frac{m_2}{M}\vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{x}_1 = \vec{X} + \frac{m_2}{M}\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_2 = \vec{x}_1 - \vec{r} = \vec{X} + \left(\frac{m_2}{M} - 1\right)\vec{r} = \vec{X} + \frac{m_2 - M}{M}\vec{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x}_2 = \vec{X} - \frac{m_1}{M}\vec{r}}$$

$$\dot{\vec{x}}_1^{\,2} = \left(\dot{\vec{X}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 = \dot{\vec{X}}^2 + \frac{2m_2}{M}\dot{\vec{X}}\cdot\dot{\vec{r}} + \frac{m_2^2}{M^2}\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

$$\dot{\vec{x}}_2^{\,2} = \left(\dot{\vec{X}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 = \underbrace{\dot{\vec{X}}^2}_{} - \underbrace{\frac{2m_1}{M}\dot{\vec{X}}\cdot\dot{\vec{r}}}_{} + \underbrace{\frac{m_1^2}{M^2}\dot{\vec{r}}^{\,2}}_{}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{x}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{x}}_2^{\,2} = \frac{M}{2}\dot{\vec{X}}^2 + 0 + \frac{m_1 m_2}{M}\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ (reduzierte Masse)

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{M}{2}\dot{\vec{X}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}}$$

$$L = T - V = \frac{M}{2}\dot{\vec{X}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r)$$

alle $\vec{X}$ zyklisch $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{X}}} = \vec{P} = \text{const}$, denn mit

EL-Gln: $\dot{\vec{P}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{X}} = 0$

L: Lagrangefunktion für zwei nicht ww. Teilchen.

„Teilchen" mit Masse M ohne Potential $\Rightarrow$ freies Teilchen

$\Rightarrow$ Schwerpunkt bewegt sich wie freies Teilchen

$\Rightarrow$ Schwerpunktsatz

„Teilchen" mit Masse μ in äußerem Zentralpotential $V(r)$.