H. van Hees **Wintersemester 2021/2022**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 12

Aufgabe 1 (10 Punkte): Trägheitstensor eines Zylinders

Berechnen Sie den Trägheitstensor für einen homogenen Zylinder der Gesamtmasse M mit Radius a und Höhe h um den Schwerpunkt.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass das Volumenelement in den üblichen Zylinderkoordinaten $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)^{\mathrm{T}}$ durch $\mathrm{d}^3 r = \mathrm{d}R \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z R$ gegeben und das Gesamtvolumen des Zylinders $V = \pi a^2 h$ ist. Der Zylinder sei dabei durch den Bereich $V: \quad R \in [0, a], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in (-h/2, h/2)$ parametrisiert.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt des Zylinders im Ursprung des Koordinatenstystems liegt.

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie die körperfesten Komponenten des Trägheitstensors

$$\Theta'_{kl} = \rho \int_V \mathrm{d}^3 x (\vec{x}^2 \delta_{kl} - x_k x_l) \tag{1}$$

mit der konstanten Dichte $\rho = M/V = M/(\pi a^2 h)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Eulerwinkel und Winkelgeschwindigkeit eines Kreisels

Wir betrachten die Parametrisierung der Drehmatrix $\hat{D}$ zwischen raum- und körperfesten Basen[1],

$$\vec{e}'_k = D_{jk} \vec{e}_j, \quad \vec{e}'_j = D_{jk} \vec{e}_k, \quad \det \hat{D} = 1, \tag{2}$$

mittels Euler-Winkeln

$$\hat{D} = \hat{D}^{(3)}(\psi) \hat{D}^{(1)}(\vartheta) \hat{D}^{(3)}(\varphi). \tag{3}$$

Ziel der Übung ist es, auf möglichst einfache Weise die Formel für die raumfesten Komponenten der Winkelgeschwindigkeit

$$\underline{\omega}' = \hat{D}^{\mathrm{T}} \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi \\ -\dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{4}$$

zu beweisen. Dabei ist

$$\hat{\Omega}' = \hat{D}^{\mathrm{T}} \dot{\hat{D}}, \quad \Omega'_{jk} = -\epsilon_{ljk} \omega'_l. \tag{5}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor (verwenden Sie dazu die Formeln in Abschnitt 4.3.2 und Anhang B im Manuskript!)

[1] In dieser Aufgabe gilt die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über doppelt auftretende Indizes wird stets von 1 bis 3 summiert!

(a) Zeigen Sie durch explizite Rechnung mit den Drehmatrizen um die 3- bzw. 1-Achse, dass

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(3)\mathrm{T}}(\psi)\dot{\hat{D}}^{(3)}(\psi) &= \hat{\Omega}'^{(3)} \quad \text{mit} \quad \underline{\omega}'^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}, \\ \hat{D}^{(1)\mathrm{T}}(\vartheta)\dot{\hat{D}}^{(1)}(\vartheta) &= \hat{\Omega}'^{(1)} \quad \text{mit} \quad \underline{\omega}'^{(1)} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

(b) Sei $\hat{R}$ eine beliebige Drehmatrix, so dass für Vektorkomponenten $\underline{a} = \hat{R}\underline{a}'$ gilt und sei der antisymmetrische Tensor durch die Komponenten $A_{jk} = -\epsilon_{ljk} a_l$ definiert. Zeigen Sie, dass dann $A'_{j'k'} = D_{jj'} D_{kk'} A_{jk}$ (bzw. $\hat{A}' = \hat{R}^{\mathrm{T}}\hat{A}\hat{R}$) mit

$$A'_{j'k'} = -\epsilon_{ljk} a'_l \quad \text{mit} \quad a'_l = R_{ml} a_m \quad \text{bzw.} \quad \underline{a}' = \hat{R}^{\mathrm{T}}\underline{a} \tag{7}$$

gilt.

(c) Verwenden Sie diese Formeln nun, um (4) zu berechnen.

Hinweis: Anwendung der Produktregel auf (3) liefert

$$\dot{\hat{D}} = \dot{\hat{D}}^{3}(\psi)\hat{D}^{(1)}(\vartheta)\hat{D}^{(3)}(\varphi) + \hat{D}^{(3)}(\psi)\dot{\hat{D}}^{(1)}(\vartheta)\hat{D}^{(3)}(\varphi) + \hat{D}^{(3)}(\psi)\hat{D}^{(1)}(\vartheta)\dot{\hat{D}}^{(3)}(\varphi). \tag{8}$$

Wenden Sie dann (5-6) zur Berechnung der Beiträge zu $\underline{\omega}'$ von jedem der drei Terme in (8) an.