H. van Hees **Wintersemester 2023/2024**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1: Freier Fall und schiefer Wurf

Der freie Fall eines Massenpunktes der Masse m wird durch die konstante Kraft

$$\underline{F}(\underline{r}) = m\underline{g} = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \tag{1}$$

beschrieben. Dabei ist $\underline{g}$ die konstante Schwerebeschleunigung in Erdnähe. Der Betrag ist $|\underline{g}| \simeq 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

(a) Lösen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r}) \tag{2}$$

für die Anfangsbedingungen $\underline{r}(0) = \underline{0}$ und $\underline{v}(0) = v_0(\cos\alpha, 0, \sin\alpha)$. Sizzieren Sie die Bahnkurve in der x_1-x_3-Ebene (zeichnen Sie auch den Winkel α ein!)

Lösung: Die Gleichung (2) kann man sofort durch zweimaliges Integrieren lösen:

$$m\ddot{\underline{r}} = m\dot{\underline{v}} = m\underline{g} \Rightarrow \dot{\underline{v}} = \underline{g} \Rightarrow \underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{g}t, \quad \underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t + \frac{1}{2}\underline{g}t^2. \tag{3}$$

Setzt man die Anfangsbedingungen ein, erhält man

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_0\cos\alpha \\ 0 \\ v_0\sin\alpha - gt \end{pmatrix}, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} v_0 t\cos\alpha \\ 0 \\ v_0 t\sin\alpha - gt^2/2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Die Bahnkurve ist offenbar eine nach unten geöffnete Parabel, denn es ist

$$x_1 = v_0 t\cos\alpha \Rightarrow t = \frac{x_1}{v_0\cos\alpha} \tag{5}$$

und damit

$$x_3 = v_0 t\sin\alpha - \frac{g}{2}t^2 = x_1\tan\alpha - \frac{g x_1^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{6}$$

(b) Bestimmen Sie die Zeit $t_{\max}$, bei der der Massepunkt den höchsten Punkt erreicht, also bei dem $x_3(t_{\max})$ maximal wird. Zu welcher Zeit t_{end} erreicht der Masse Punkt wieder den Boden ($x_3(t_{\text{end}}) = 0$). Wie weit ist dann der Massenpunkt geflogen (d.h. berechnen Sie $x_1(t_{\text{end}})$?

Lösung: Zur Zeit $t_{\max}$ muss notwendig $\dot{x}_3(t_{\max}) = v_3(t_{\max}) = 0$ sein, d.h.

$$v_0\sin\alpha - g t_{\max} = 0 \Rightarrow t_{\max} = \frac{v_0}{g}\sin\alpha. \tag{7}$$

Da weiter $\ddot{x}_3 = \dot{v}_3 = -g < 0$ ist, liegt tatsächlich ein Maximum vor.

Aus (4) folgt

$$x_3(t_{\text{end}}) = v_0 t_{\text{end}} \sin\alpha - \frac{g}{2} t_{\text{end}}^2 = t_{\text{end}} \left(v_0 \sin\alpha - \frac{g}{2} t_{\text{end}} \right) = 0. \tag{8}$$

Es ist klar, dass gemäß der Anfangsbedingung $x_3(0) = 0$ ist. Die zweite Nullstelle bestimmt demnach

$$t_{\text{end}} = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{9}$$

Die Wurfweite ist dann durch

$$L(\alpha) = x_1(t_{\text{end}}) = \frac{2 v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) \tag{10}$$

gegeben. Im letzten Schritt haben wir das „Doppelwinkeltheorem" $\sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \cos\alpha$ verwendet.

(c) Für welchen Abwurfwinkel α erreicht man die größte Wurfweite?

Man erhält die größte Flugweite bei fester Anfangsgeschwindigkeit $|\underline{v}_0| = v_0$ für den Winkel, für den $L'(\alpha) = 0$ ist. Mit der Kettenregel erhält man

$$L'(\alpha) = \frac{2 v_0^2}{g} \cos(2\alpha) \stackrel{!}{=} 0. \tag{11}$$

Es sind hier natürlich nur Lösungen $\alpha \in [0, \pi/2]$ relevant, und damit $2\alpha = \pi/2$, d.h. $\alpha = \pi/4$. Man muß die Masse also im Winkel von 45° zur Erdoberfläche abwerfen, um die maximal mögliche Wurfweite zu erhalten. Dass wirklich ein Maximum vorliegt folgt aus

$$L''(\alpha) = -\frac{4 v_0^2}{g} \sin(2\alpha) \Rightarrow L''(\pi/4) = -\frac{4 v_0^2}{g} < 0, \tag{12}$$

d.h. es liegt tatsächlich ein Maximum vor.

Aufgabe 2: Freier Fall und schiefer Wurf mit Luftwiderstand

Wir betrachten die vorige Aufgabe unter etwas realistischeren Bedingungen mit Berücksichtigung des Luftwiderstands. Für nicht zu schnelle Bewegungen ist die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit (sog. Stokes-Reibung), d.h. es ist

$$\underline{F}_{\text{r}} = -\gamma \underline{v}, \quad \gamma > 0. \tag{13}$$

Die Bewegungsgleichung lautet demnach unter Berücksichtigung der Luftreibung

$$m \underline{a} = m \underline{\dot{v}} = m \underline{g} - \gamma \underline{v} \tag{14}$$

bzw.

$$m \underline{\dot{v}} + \gamma \underline{v} = m \underline{g}. \tag{15}$$

(a) Vollziehen Sie die Lösung dieser Gleichung unter Berücksichtigung allgemeiner Anfangsbedingungen $\underline{r}(0) = \underline{r}_0$, $\underline{v}(0) = \underline{\dot{r}}(0) = \underline{v}_0$ im Skript zur Vorlesung (Abschnitt 2.3.2) nach.

Lösung: Wie im Skript erörtert, ist die allgemeine Lösung der DGL (15) die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL, also mit $\underline{g} = 0$,

$$m\dot{\underline{v}}_\mathrm{h} + \gamma \underline{v}_\mathrm{h} = \underline{0}, \tag{16}$$

und einer beliebigen speziellen Lösung der vollständigen inhomogenen Gleichung (15).

Die homogene Gleichung (16) lösen wir mit dem Standardansatz für lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten, also

$$\underline{v}_\mathrm{h} = \underline{A}\exp(\lambda t), \quad \underline{A} = \text{const}. \tag{17}$$

Dies in (16) eingesetzt, ergibt

$$m\lambda\underline{A}\exp(\lambda t) + \gamma\underline{A}\exp(\lambda t) = \underline{0} \Rightarrow (m\lambda+\gamma)\underline{A}\exp(\lambda t) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\gamma}{m}. \tag{18}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung ist

$$\underline{v}_\mathrm{h} = \underline{A}\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right). \tag{19}$$

Jetzt benögen wir noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (15). Offenbar können wir mit dem Ansatz $\underline{v} = \underline{c} = \text{const}$ zum Ziel kommen. Denn dann ist $\dot{\underline{v}} = \underline{0}$ und

$$\gamma\underline{v} = \underline{g} \Rightarrow \underline{v} = \frac{m\underline{g}}{\gamma}. \tag{20}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet dann

$$\underline{v} = \underline{v}_\mathrm{h} + \frac{m\underline{g}}{\gamma} = \underline{A}\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) + \frac{m\underline{g}}{\gamma}. \tag{21}$$

Die Anfangsbedingung verlangt

$$\underline{v}(0) = \underline{v}_0 = \underline{A} + \frac{m\underline{g}}{\gamma} \Rightarrow \underline{A} = \underline{v}_0 - \frac{m\underline{g}}{\gamma}. \tag{22}$$

Setzt man dies in (21) ein, erhält man nach einfachen Umformungen

$$\underline{v} = \underline{v}_0\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) + \frac{m\underline{g}}{\gamma}\left[1-\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right]. \tag{23}$$

Durch Integrieren finden wir dann

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + \int_0^t \mathrm{d}t'\underline{v}(t') = \underline{r}_0 + \frac{m}{\gamma}\underline{v}_0\left[1-\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right] + \frac{m\underline{g}}{\gamma}\left\{t + \frac{m}{\gamma}\left[\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)-1\right]\right\}. \tag{24}$$

(b) Betrachten Sie jetzt den Spezialfall des freien Falls, also die Lösung unter der Anfangsbedingung $\underline{r}(0) = \underline{0}$, $\underline{v}_0 = \underline{0}$. Dann ist natürlich nur die Komponente $x_3(t)$ und die Geschwindigkeit $v_3(t) = \dot{x}_3(t)$ relevant. Diskutieren Sie das Verhalten der Lösung $x_3(t)$ und die Geschwindigkeit $v_3(t)$ für große Zeiten und für kleine Zeiten ($t \to 0$ bzw. $t \to \infty$) und interpetieren sie die Resultate physikalisch. Betrachten Sie dazu auch die Beschleunigung $a_3(t)$.

Lösung: Für diesen Spezialfall ergibt sich aus (23) und (24)

$$v_3 = -\frac{mg}{\gamma}\left[1-\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right], \tag{25}$$

$$x_3 = -\frac{mg}{\gamma}\left\{t+\frac{m}{\gamma}\left[\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)-1\right]\right\}. \tag{26}$$

Für die Beschleunigung findet man durch Ableiten von (25) nach t

$$a_3 = \dot{v}_3 = -g\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right). \tag{27}$$

Für $t \to \infty$ ist also $a_3 \to 0$, d.h. die Beschleunigung des Teilchens verschwindet für große Zeiten. Damit ist auch die Gesamtkraft auf das Teilchen für große Zeiten nahezu Null. Das erklärt sich daraus, dass im Limes $t \to \infty$ sich die Geschwindigkeit so einstellt, dass sich die Gravitationskraft und die Reibungskraft gerade kompensieren. Diese Grenzgeschwindigkeit ergibt sich gemäß (25) zu

$$\underset{t\to\infty}{\cong} v_3(t) = -\frac{mg}{\gamma}. \tag{28}$$

Entsprechend bewegt sich das Teilchen für $t \to \infty$ fast geradlinig gleichförmig nach unten. In der Tat ergibt sich aus (27)

$$x_3 \underset{t\to\infty}{\cong} -\frac{mg}{\gamma}t + \frac{m^2}{\gamma^2}g. \tag{29}$$

Für kleine Zeiten $t \to 0$ verwenden wir die Potenzreihe für die Exponentialfunktion

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \tag{30}$$

Wenden wir dies auf die Beschleunigung (27) an und setzen einfach $\exp(-\gamma t/m) \simeq 1$, folgt

$$a_3(t) \underset{t\to 0}{\cong} -g. \tag{31}$$

Da anfangs die Geschwindigkeit 0 bzw. klein ist, kann man erwartungsgemäß für kleine Zeiten die Reibungskraft vernachlässigen, und zu Beginn bewegt sich der Körper wie beim freien Fall ohne Luftwiderstand.

Entsprechend folgt für die Geschwindigkeit (25), wobei wir jetzt die Entwicklung der Exponentialfunktion bis zur linearen Ordnung des Arguments verwenden müssen, um ein von Null verschiedenes Resultat zu erhalten:

$$v_3(t) \underset{t\to 0}{\cong} = -\frac{mg}{\gamma}\left[1-\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)-1\right] = -gt, \tag{32}$$

wie zu erwarten für den freien Fall ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Entsprechend müssen wir für die Ortskoordinate (26) die Exponentialfunktion bis zur zweiten Ordnung ihres Arguments entwickeln. Wie zu erwarten folgt

$$x_3(t) \underset{t\to 0}{\cong} -\frac{mg}{\gamma}\left[t+\frac{m}{\gamma}\left(1-\frac{\gamma}{m}t+\frac{\gamma^2}{2m^2}t^2-1\right)\right] = -\frac{g}{2}t^2. \tag{33}$$

Bemerkung: Da man das Integral von Funktionen, die durch eine Potenzreihe gegen sind durch „naive gliedweise Integration“ dieser Reihe berechnen kann, hätte man die Näherungen für Geschwindigkeit und Ortskoordinate (32) bzw. (33) auch durch Integration der Näherung (31) für die Beschleunigung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen berechnen können. In der Tat stimmen die Ergebnisse für beide Rechenmethoden überein.