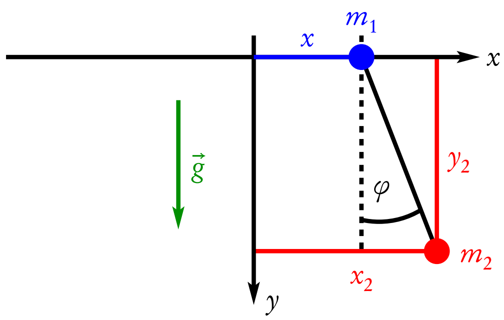
H. van Hees Wintersemester 2023/2024

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 9
Lösungen

Aufgabe 1 (10 Punkte): Rollpendel

Ein Massenpunkt m_1 gleite reibungsfrei entlang der x-Achse. An diesem Massenpunkt sei eine masselose starre Stange der Länge R befestigt, an deren Ende sich ein Massenpunkt m_2 befindet. Die Stange kann reibungsfrei in der xy-Ebene um m_1 schwingen.



Zur Beschreibung der Bewegung der beiden Massenpunkte verwenden wir im Folgenden die generalisierten Koordinaten x und φ. Stellen Sie die dazugehörige Lagrange-Funktion auf und diskutieren Sie die Bewegung des Systems:

(a) (2 Punkte) Drücken Sie die Ortsvektoren $\underline{r}_1$ und $\underline{r}_2$ der beiden Massenpunkte durch die generalisierten Koordinaten x und φ aus.

Lösung: Aus der Skizze liest man unmittelbar

$$\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{r}_2 = \begin{pmatrix} x + R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{1}$$

ab.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für die kinetische Energie

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\underline{r}}_2{}^2 = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi) \tag{2}$$

mit $M = m_1 + m_2$ gilt.

Lösung: Für die Zeitableitungen der Ortsvektoren folgt aus (1)

$$\dot{\underline{r}}_1 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{r}}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x} + R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -R\dot{\varphi}\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{3}$$

und damit

$$\dot{\underline{r}}_1^2 = \dot{x}^2, \quad \dot{\underline{r}}_2^2 = \dot{x}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi + R^2\dot{\varphi}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \dot{x}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi + R^2\dot{\varphi}^2. \tag{4}$$

Dies ergibt sofort (2).

(c) (1 Punkt) Wie lautet die potentielle Energie für die Schwerkraft auf m_2?

Lösung: Wegen $\underline{g} = (0, g)^{\mathrm{T}}$ ist

$$V = -m_2 \underline{g} \cdot \underline{r}_2 = -m_2 g y_2 = -m_2 g R \cos\varphi. \tag{5}$$

(d) (1 Punkt) Welche Koordinate ist zyklisch? Was folgt daraus für $x(t)$?

Lösung: Mit (2) und (5) folgt

$$L = T - V = \frac{m_1}{2}\dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\underline{r}}_2{}^2 = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi) + m_2 g R\cos\varphi. \tag{6}$$

Da L nicht von x abhängt, ist x eine zyklische Variable und damit der dazu gehörige kanonische Impuls

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m_2 R\dot{\varphi}\cos\varphi = \text{const.} \tag{7}$$

Wir können dies nach $\dot{x}$ auflösen

$$\dot{x} = \frac{1}{M}(p_x - m_2 R\dot{\varphi}\cos\varphi) \tag{8}$$

und einmal bzgl. t integrieren:

$$x = \frac{1}{M}(p_x t - m_2 R\sin\varphi + m_2 R\sin\varphi_0) + x_0. \tag{9}$$

Dabei ist $\varphi(0) = \varphi_0$ der Anfangswert von φ und $x_0 = x(0)$ der Anfangswert von x.

(e) (3 Punkte) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für φ auf und betrachten Sie die Schwingungen von m_2 für kleine Auslenkungen $|\varphi| \ll 1$. Welche Kreisschwingungsfrequenz ergibt sich für diese kleinen Schwingungen?

Lösung: Zuerst berechnen wir den zu φ konjugierten Impuls:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2(R^2\dot{\varphi} + R\dot{x}\cos\varphi). \tag{10}$$

Damit ergibt sich nach einigen einfachen Umformungen die Bewegungsgleichung für φ aus der Euler-Lagrangegleichung

$$\dot{p}_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow R\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi = -g\sin\varphi. \tag{11}$$

Durch Ableiten von (8) nach der Zeit erhalten wir

$$\ddot{x} = -\frac{m_2}{M}R(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \tag{12}$$

und können damit $\ddot{x}$ aus (11) eliminieren

$$R\ddot{\varphi} - \frac{m_2}{M}R(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = -g\sin\varphi. \tag{13}$$

Um die Kleinwinkelnäherung dieser Gleichung zu finden, setzen wir formal $\varphi(t) = \epsilon\theta(t)$, setzen dies in (13) ein und entwickeln bis zur linearen Ordnung in ϵ

$$R\epsilon\ddot{\theta} - \frac{m_2}{M} R\epsilon\ddot{\theta} + \mathcal{O}(\epsilon^3) = -g\epsilon\theta + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{14}$$

Setzen wir nun wieder $\epsilon\vartheta = \varphi$, erhalten wir als lineare Näherung der Bewegungsgleichung (13)

$$R\ddot{\varphi}\left(1 - \frac{m_2}{M}\right) = \frac{Rm_1}{M}\ddot{\varphi} = -g\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi \tag{15}$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{m_1}\frac{g}{R}}. \tag{16}$$