H. van Hees **Wintersemester 2023/2024**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 11

Aufgabe 1 (10 Punkte): Trägheitstensor eines Zylinders

Berechnen Sie den Trägheitstensor für einen homogenen Zylinder der Gesamtmasse M mit Radius a und Höhe h um den Schwerpunkt.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass das Volumenelement in den üblichen Zylinderkoordinaten $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)^{\mathrm{T}}$ durch $\mathrm{d}^3 r = \mathrm{d}R\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}zR$ gegeben und das Gesamtvolumen des Zylinders $V = \pi a^2 h$ ist. Der Zylinder sei dabei durch den Bereich $V: \quad R \in [0,a], \quad \varphi \in [0,2\pi], \quad z \in (-h/2, h/2)$ parametrisiert.

Lösung: Die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien sind

$$\underline{T}_R = \partial_R \underline{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}_\varphi = \partial_\varphi \underline{r} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}_z = \partial_z \underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Daraus ergibt sich das Volumenelement zu

$$\mathrm{d}^3 r = \mathrm{d}R\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z(\underline{T}_R \times \underline{T}_\varphi)\cdot\underline{T}_z = \mathrm{d}R\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z(\underline{T}_R \times \underline{T}_\varphi)_3 = \mathrm{d}R\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}zR(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \mathrm{d}R\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}zR. \tag{2}$$

Das Volumen des Zylinders ist damit

$$V = \int_0^a \mathrm{d}R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}zR = 2\pi h \left(\frac{R^2}{2}\right)_{R=0}^{R=a} = \pi a^2 h. \tag{3}$$

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt des Zylinders im Ursprung des Koordinatenstystems liegt.

Lösung: Der Schwerpunkt ist durch

$$\underline{s} = \frac{1}{V} \int_0^a \mathrm{d}R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}zR\underline{r} = \frac{1}{\pi a^2 h} \int_0^a \mathrm{d}R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}. \tag{4}$$

gegeben. Die oberen beiden Komponenten verschwinden aufgrund der Integration bzgl. φ:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cos\varphi = \sin\varphi|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0, \quad \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sin\varphi = -\cos\varphi|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0, \tag{5}$$

und die dritte Komponente wegen

$$\int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z z = \left.\frac{z^2}{2}\right|_{z=-h/2}^{z=h/2} = 0. \tag{6}$$

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie die körperfesten Komponenten des Trägheitstensors

$$\Theta'_{kl} = \rho \int_V \mathrm{d}^3 x (\vec{x}^2 \delta_{kl} - x_k x_l) \tag{7}$$

mit der konstanten Dichte $\rho = M/V = M/(\pi a^2 h)$.

Lösung: Aus Symmetriegründen ist $\Theta_{11} = \Theta_{22}$. Weiter ist der Integrand in (7) für Θ_{11} durch $\underline{r}^2 - x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 = R^2 \sin^2 \varphi + z^2$ gegeben, und damit folgt

$$\Theta'_{11} = \rho \int_0^a \mathrm{d}R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z R(R^2 \sin^2 \varphi + z^2). \tag{8}$$

Zur Berechnung des Integrals über φ bemerken wir, dass

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sin^2 \varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cos^2 \varphi \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi 1 = \pi \tag{9}$$

ist und damit

$$\begin{aligned} \Theta'_{11} = \Theta'_{22} &= \rho \int_0^a \mathrm{d}R \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z (\pi R^3 + 2\pi R z^2) \\ &= \rho\pi \int_0^a \mathrm{d}R \left(R^3 h + \frac{R h^3}{6} \right) \\ &= \rho\pi \left(\frac{a^4 h}{4} + \frac{a^2 h^3}{12} \right) \\ &= \frac{\rho \pi a^2 h}{12} (3a^2 + h^2) = \frac{M}{12} (3a^2 + h^2). \end{aligned} \tag{10}$$

Weiter ist der Integrand in (7) für Θ'_{33} durch $\underline{r}^2 - x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 = R^2$ gegeben und damit

$$\Theta'_{33} = \rho \int_0^a \mathrm{d}R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z R^3 = \rho \frac{2\pi h a^4}{4} = \frac{\rho \pi a^2 h}{2} a^2 = \frac{M a^2}{2}. \tag{11}$$

Für die Außerdiagonalelemente erhalten wir aus Symmetriegründen 0:

$$\begin{aligned} \Theta'_{12} = \Theta'_{21} &= -\rho \int_0^a \mathrm{d}R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z R^3 \cos\varphi \sin\varphi \\ &= -\frac{\rho h a^4}{4} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sin(2\varphi) = \frac{\rho h a^4}{8} \cos(2\varphi)\big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0, \\ \Theta'_{13} = \Theta'_{31} &= -\rho \int_0^a \mathrm{d}R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z R^2 z \cos\varphi = 0, \\ \Theta'_{23} = \Theta'_{32} &= -\rho \int_0^a \mathrm{d}R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z R^2 z \sin\varphi = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Wie aus Symmetriegründen zu erwarten, ist das gewählte körperfeste Koordinatensystem ein Hauptträgheitssystem, und somit bilden die körperfesten Komponenten des Trägheitstensors eine Diagonalmatrix

$$\hat{\Theta}' = \mathrm{diag}\left(\frac{M}{12}(3a^2 + h^2), \frac{M}{12}(3a^2 + h^2), \frac{M a^2}{2} \right). \tag{13}$$

Wegen $\Theta_{11} = \Theta_{22}$ handelt es sich bei Rotation um den Schwerpunkt eines Zylinders also um einen symmetrischen Kreisel.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Eulerwinkel und Winkelgeschwindigkeit eines Kreisels

Wir betrachten die Parametrisierung der Drehmatrix $\hat{D}$ zwischen raum- und körperfesten Basen[1],

$$\vec{e}_k^{\,\prime} = D_{jk}\vec{e}_j, \quad \vec{e}_j^{\,\prime} = D_{jk}\vec{e}_k, \quad \det\hat{D} = 1, \tag{14}$$

mittels Euler-Winkeln

$$\hat{D} = \hat{D}^{(3)}(\psi)\hat{D}^{(1)}(\vartheta)\hat{D}^{(3)}(\varphi). \tag{15}$$

Ziel der Übung ist es, auf möglichst einfache Weise die Formel für die raumfesten Komponenten der Winkelgeschwindigkeit

$$\underline{\omega}' = \hat{D}^{\mathrm{T}}\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi \\ -\dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{16}$$

zu beweisen. Dabei ist

$$\hat{\Omega}' = \hat{D}^{\mathrm{T}}\dot{\hat{D}}, \quad \Omega'_{jk} = -\epsilon_{ljk}\omega'_l. \tag{17}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor (und verwenden Sie die Formeln in Abschnitt 4.3.2 Anhang B im Manuskript!)

(a) Zeigen Sie durch explizite Rechnung mit den Drehmatrizen um die 3- bzw. 1-Achse, dass

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(3)\mathrm{T}}(\psi)\dot{\hat{D}}^{(3)}(\psi) &= \hat{\Omega}'^{(3)} \quad \text{mit} \quad \underline{\omega}'^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}, \\ \hat{D}^{(1)\mathrm{T}}(\vartheta)\dot{\hat{D}}^{(1)}(\vartheta) &= \hat{\Omega}'^{(1)} \quad \text{mit} \quad \underline{\omega}'^{(1)} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{18}$$

Lösung: Es gilt

$$\dot{\hat{D}}^{(3)}(\psi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dot{\psi}\begin{pmatrix} -\sin\psi & -\cos\psi & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(3)\mathrm{T}}(\psi)\dot{\hat{D}}^{(3)}(\psi) &= \dot{\psi}\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\psi & -\cos\psi & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\psi}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \omega_1'^{(3)} = \omega_2'^{(3)} = 0, \quad \omega_3'^{(3)} = \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{20}$$

[1] In dieser Aufgabe gilt die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über doppelt auftretende Indizes wird stets von 1 bis 3 summiert!

Genauso ergibt sich

$$\hat{D}^{(1)\mathrm{T}}(\vartheta)\dot{\hat{D}}^{(1)}(\vartheta) = \dot{\vartheta}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta\\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\sin\vartheta & -\cos\vartheta\\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta\end{pmatrix} = \dot{\vartheta}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \omega_2'^{(3)} = \omega_3'^{(3)} = 0, \quad \omega_1'^{(3)} = \dot{\vartheta}. \tag{21}$$

(b) Sei $\hat{R}$ eine beliebige Drehmatrix, so dass für Vektorkomponenten $\underline{a} = \hat{R}\underline{a}'$ gilt und sei der antisymmetrische Tensor durch die Komponenten $A_{jk} = -\epsilon_{ljk} a_l$ definiert. Zeigen Sie, dass dann $A'_{j'k'} = D_{jj'} D_{kk'} A_{jk}$ (bzw. $\hat{A}' = \hat{R}^{\mathrm{T}}\hat{A}\hat{R}$) mit

$$A'_{j'k'} = -\epsilon_{ljk} a'_l \quad \text{mit} \quad a'_l = R_{ml} a_m \quad \text{bzw.} \quad \underline{a}' = \hat{R}^{\mathrm{T}}\underline{a} \tag{22}$$

gilt.

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} A'_{j'k'} &= D_{jj'} D_{kk'} A_{jk} = -D_{jj'} D_{kk'} \epsilon_{ljk} a_l \\ &= -D_{jj'} D_{kk'} D_{ll'} a'_{l'} \epsilon_{ljk} = -\det\hat{D}\,\epsilon_{j'k'l'} a_{l'} \\ &= -\epsilon_{l'j'k'} a'_{l'}. \end{aligned} \tag{23}$$

(c) Verwenden Sie diese Formeln nun, um (16) zu berechnen.

Hinweis: Anwendung der Produktregel auf (15) liefert

$$\dot{\hat{D}} = \dot{\hat{D}}^{(3)}(\psi)\hat{D}^{(1)}(\vartheta)\hat{D}^{(3)}(\varphi) + \hat{D}^{(3)}(\psi)\dot{\hat{D}}^{(1)}(\vartheta)\hat{D}^{(3)}(\varphi) + \hat{D}^{(3)}(\psi)\hat{D}^{(1)}(\vartheta)\dot{\hat{D}}^{(3)}(\varphi). \tag{24}$$

Wenden Sie dann (17-18) zur Berechnung der Beiträge zu $\underline{\omega}'$ von jedem der drei Terme in (24) an.

Lösung: Der erste Term in (24) trägt zu $\hat{\Omega}'$ den Term

$$\hat{\Omega}'_1 = \hat{D}^{\mathrm{T}}\dot{\hat{D}}^{(3)}(\psi)\hat{D}^{(1)}(\vartheta)\hat{D}^{(3)}(\varphi) = \left[\hat{D}^{(1)}(\vartheta)\hat{D}^{(3)}(\varphi)\right]^{\mathrm{T}}\left[\hat{D}^{(3)\mathrm{T}}(\psi)\dot{\hat{D}}^{(3)}(\psi)\right]\left[\hat{D}^{(1)}(\vartheta)\hat{D}^{(3)}(\varphi)\right] \tag{25}$$

bei. Wendet man darauf (22) mit $\hat{R} = \hat{D}^{(1)}(\vartheta)\hat{D}^{(3)}(\varphi)$ und (25) an, erhält man als den entsprechenden Beitrag zu $\underline{\omega}'$

$$\underline{\omega}'_1 = \dot{\psi}\left[\hat{D}^{(1)}(\vartheta)\hat{D}^{(3)}(\varphi)\right]^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \dot{\psi}\begin{pmatrix}\sin\vartheta\sin\varphi\\ \sin\vartheta\cos\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix} \tag{26}$$

Der zweite Term in (24) liefert

$$\hat{\Omega}'_2 = \hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{D}^{(3)}(\psi)\dot{\hat{D}}^{(1)}(\vartheta)\hat{D}^{(3)}(\varphi) = \hat{D}^{(3)^{\mathrm{T}}}(\varphi)\left[\hat{D}^{(1)\mathrm{T}}(\vartheta)\dot{\hat{D}}^{(1)}(\vartheta)\right]\hat{D}^{(3)}(\varphi). \tag{27}$$

Wendet man hierauf (22) mit $\hat{R} = \hat{D}^{(3)}(\varphi)$ und (18) an, erhält man

$$\underline{\omega}'_2 = \dot{\vartheta}\hat{D}^{(3)^{\mathrm{T}}}(\varphi)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \dot{\vartheta}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}. \tag{28}$$

Der dritte Term in (24) liefert schließlich

$$\hat{\Omega}'_3 = \hat{D}^{\mathrm{T}} \hat{D}^{(3)}(\psi) \hat{D}^{(1)}(\vartheta) \dot{\hat{D}}^{(3)}(\varphi) = \hat{D}^{(3)\mathrm{T}}(\varphi) \dot{\hat{D}}^{(3)}(\varphi) \tag{29}$$

und daraus direkt mit (18)

$$\underline{\omega}'_3 = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Addiert man (26), (28) und (30) erhält man schließlich die zu beweisende Gleichung (16).

Bemerkung: Die Komponenten von $\vec{\omega}$ bzgl. des raumfesten Bezugssystems erhält man sofort durch Anwendung der Transformationsmatrix $\hat{D}$

$$\underline{\omega} = \hat{D} \underline{\omega}' = \begin{pmatrix} \Omega_{32} \\ \Omega_{13} \\ \Omega_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \\ \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix}. \tag{31}$$