Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 2

Aufgabe 1: Beispiel zum Gaußschen Integralsatz

Es sei V der Kreiszylinder parallel zur x_3-Achse eines kartesischen Koordinatensystems mit Radius 2 und $x_3 \in [0,3]$. Verifizieren Sie dann den Gaußschen Integralsatz

$$\int_V \mathrm{d}^3 x \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}^2 \vec{f} \cdot \vec{V}(\vec{x}) \tag{1}$$

für das Vektorfeld, das in kartesischen Koordinaten durch

$$\vec{V}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ -2x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

gegeben ist, indem Sie das Volumen- und das Flächenintegral konkret ausrechnen.

Hinweis: Es empfiehlt sich, für die Berechnung des Volumen- und des Flächenintegrals Zylinderkoordinaten (R, φ, z) gemäß

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

einzuführen und das Volumenelement $\mathrm{d}^3 x$ und die Flächenelemente $\mathrm{d}^2 \vec{f}$ für die drei die Randfläche ergebenden Teilflächen (Kreisscheiben für „Boden und Deckel" des Zylinders und die Mantelfäche) zu berechnen.

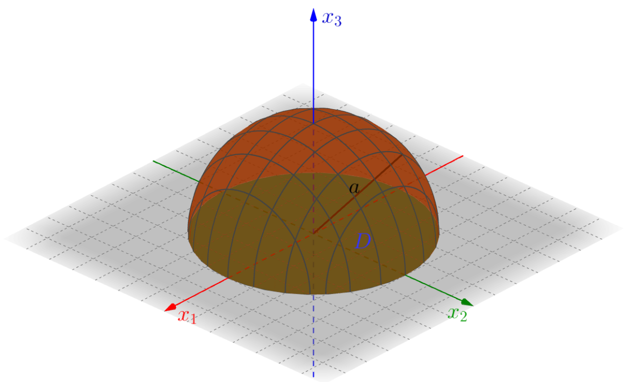
Aufgabe 2: Volumen einer Halbkugel auf drei Rechenwegen

Um zu demonstrieren, wieviel Rechenarbeit man sich durch die geeignete Wahl von Koordinaten sparen kann, berechnen wir das Volumen einer Halbkugel auf drei verschiedene Arten. In allen Teilaufgaben hilft es natürlich, sich immer die Geometrie in einfachen Skizzen zu vergegenwärtigen!

(a) Für eine Halbkugel mit Radius a und Mittelpunkt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gilt (*warum?*) die Gleichung

$$x_3 = g(x_1, x_2) = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}. \tag{4}$$

Finden Sie den Definitionsbereich D dieser Funktion in der $x_1 x_2$-Ebene!



(b) Parametrisieren Sie diesen Definitionsbereich in kartesischen Koordinaten und berechnen Sie das Volumen aus dem entsprechenden Flächenintegral

$$V = \int_D \mathrm{d}^2 r \, g(\vec{r}), \tag{5}$$

wobei $\vec{r}$ der Vektor in der Ebene mit Komponenten (x_1, x_2) ist.

Hinweis: Hierbei ist das Integral

$$\int_{-b}^{b} \mathrm{d}x \sqrt{b^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} b^2 \tag{6}$$

nützlich. Es folgt daraus, dass das Integral die Fläche unter einem Halbkreis $y = \sqrt{b^2 - x^2}$ ergibt (*warum?*).

(c) Berechnen Sie das Volumenintegral nochmals mittels (5), verwenden aber diesmal ebene Polarkoordinaten

$$x_1 = R \cos \varphi, \quad x_2 = R \sin \varphi, \quad R \geq 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \tag{7}$$

Bestimmen Sie dazu zunächst den Bereich, den die Polarkoordinaten (R, φ) durchlaufen, um D zu parametrisieren und zeigen Sie dann, dass das durch die entsprechenden Koordinatenlinien definierte Flächenelement durch

$$\mathrm{d}^2 r = \mathrm{d}R \, \mathrm{d}\varphi \, R \tag{8}$$

gegeben ist. Verwenden Sie diese Vorüberlegungen, um wieder (5) auszuwerten.

(d) Berechnen Sie schließlich das Halbkugelvolumen in räumlichen Kugelkoordinaten

$$x_1 = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad x_2 = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad x_3 = r \cos \vartheta \tag{9}$$

mittels des Volumenintegrals

$$V = \int_K \mathrm{d}^3 r, \tag{10}$$

wobei K die Halbkugel sei. Bestimmen Sie dazu zunächst den Integrationsbereich in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ), die K parametrisieren.

Hinweis: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die von den Koordinaten aufgespannte Volumenelemente durch

$$\mathrm{d}^3 r = \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \, r^2 \sin \vartheta \tag{11}$$

gegeben sind.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://th.physik.uni-frankfurt.de/~hees/theo2-l3-SS19/index.html`