**H. van Hees** **Sommersemester 2019**

# Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 3

---

**Aufgabe 1: Elektrisches Potential eines homogen geladenen Zylinders**

Gegeben sei ein unendlich langer Zylinder parallel zur $x_3$-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Der Mittelpunkt der Kreisquerschnittsflächen sei bei $x_1 = x_2 = 0$ und der Kreisradius $a$. Der Zylinder bestehe aus homogen geladener Materie, d.h. im Zylinder sei die Ladungsdichte $\rho = \text{const}$ und außerhalb $0$. Rechnen Sie in Zylinderkoordinaten. Die Formeln in Anhang A.2 des Manuskripts dürfen im Folgenden ohne Beweis verwendet werden.

(a) Argumentieren Sie, dass aus Symmetriegründen das elektrostatische Potential nur von $R$ abhängen kann. Überlegen Sie dazu zuerst, welche Symmetrien der Zylinder aufweist.

(b) Verwenden Sie nun den Ansatz $\Phi(\vec{r}) = V(R)$, um die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

durch einfache Integrationen zu lösen und berechnen Sie dann $\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi$.

**Tipp:** Verwenden Sie die Stetigkeit von $\Phi$ und $\vec{E}$ bei $R = a$ sowie die Bedingung, dass $\Phi$ in $R = 0$ keine Singularität besitzen darf, um die auftretenden Integrationskonstanten für die Bereiche $R < a$ und $R > a$ vollständig festzulegen.

(c) Überprüfen Sie die Lösung, indem Sie zeigen, dass in der Tat überall

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \tag{2}$$

gilt.

---

**Aufgabe 2: Potentialwirbel**

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{e}_3 \times \frac{\vec{r}}{r^2}. \tag{3}$$

(a) Berechnen Sie Rotation und Divergenz des Feldes in kartesischen Koordinaten!

(b) Stellen Sie das Vektorfeld in Standardzylinderkoordinaten $(R, \varphi, z)$ dar und berechnen Sie abermals Rotation und Divergenz. Dabei dürfen wieder die Formeln in Anhang A.2 des Manuskripts verwendet werden.

(c) Existiert ein skalares Potential, so dass

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\Phi = -\operatorname{grad}\Phi \tag{4}$$

gilt?

(d) Berechnen Sie das Wegintegral

$$J = \int_{K_a} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{V} \tag{5}$$

entlang des Kreises in der $x_1$-$x_2$-Ebene mit dem Mittelpunkt bei $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und Radius $a$, der durch

$$K_a: \quad \vec{r}(\varphi) = a \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \tag{6}$$

parametrisiert sei.

(e) **Zum Knobeln:** Wie lässt sich das mit dem in Abschnitt 1.5.5 des Manuskripts besprochenen Lemma von Poincaré vereinbaren? Ist der Satz von Stokes auf das Wegintegral anwendbar?

---

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://th.physik.uni-frankfurt.de/~hees/theo2-l3-SS19/index.html`