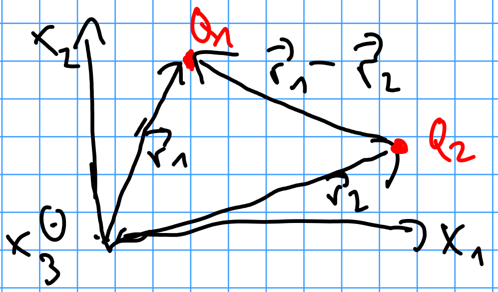
1

Review zur E-Dynamik

Ladung als additive fundamentale Eigenschaft der Mat.

- äußert sich durch Kräfte
- Elektrostatik



$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$Q_1 Q_2 > 0 \Rightarrow$ Abstoßung

$Q_1 Q_2 < 0 \Rightarrow$ Anziehung

SI-System: e (Ladung von Proton)

$$e \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, C = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, As$$

ε_0: Permittivität des Vakuums

- Elektrisches Feld (lokale Wirkungen)

Ladung 1: Quelle des elektrostat. Feldes

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

$$\vec{F}_2 = Q_2 \vec{E}(\vec{r}_2)$$

Kraft wirkt wegen Feld $\vec{E}$ am Ort der Ladung 2 (lokal)

- Magnetfeld $\vec{B}$: $\vec{F}_2 = Q_2\, \vec{v}_2 \times \vec{B}(\vec{r}_2)$

$$\vec{F}_2 = Q_2 \left[\vec{E}(\vec{r}_2) + \vec{v}_2 \times \vec{B}(\vec{r}_2)\right]$$

Maxwell-Gln.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \vec{0}$$ (Faradaysches Induktionsgesetz)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ (Gaußsches Gesetz für $\vec{B}$-Feld / "keine magnetischen Monopole")

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0}_{1/c^2} \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}$$ (Maxwell-Ampère)

μ_0: Permeabilität des Vakuums

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$ (Gauß-Ges. für $\vec{E}$)

$\vec{\nabla} \cdot$

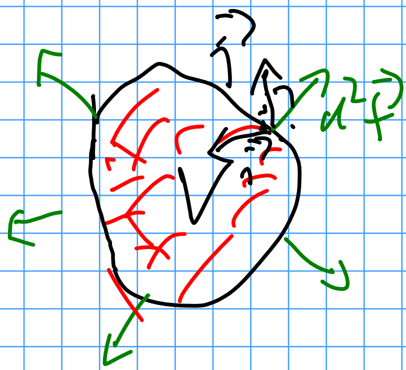
$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{0} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$-\partial_t \rho \cancel{\mu_0} = \cancel{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$\int_V d^3x$

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \, \rho(t, \vec{x}) = \dot{Q}_V = -\int_V d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

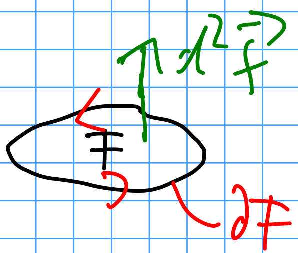


$$= -\int_{\partial V} d^2\vec{f} \cdot \vec{j}$$

Ladungserhaltung

Faraday-Gesetz in Integralform

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$



$$\int_F d^2\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\int_F d^2\vec{f} \cdot \partial_t \vec{B}$$

$$\Phi_B(t) = \int_{F(t)} d^2\vec{f} \cdot \vec{B}(t, \vec{r})$$

$$-\dot{\Phi}_B(t) = -\int_F d^2\vec{f}\, \partial_t \vec{B} + \int_{\partial F} d\vec{r}\, \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\boxed{-\dot{\Phi}_B = \int_{\partial F} d\vec{r} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \mathcal{E}} \text{ elektromot. Kraft}$$

Bsp. Generator

Energie und Impuls des elm. Feldes

$$u(t,\vec{x}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2(t,\vec{x}) + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2(t,\vec{x})$$

Energie-Dichte ("Intensität von Licht")

$$\vec{g}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \rightarrow \text{Impuls-Dichte}$$

$$\vec{j}_E(t,\vec{x}) = \varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} \longrightarrow \text{Energie-Stromdichte}$$

Elektromagn. Wellen (für $\rho=0$, $\vec{j}=0$)

$$\Box\vec{E} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta \quad ; \quad \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\Box\vec{B} = 0$$

Ebene Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left[-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}\right]$$

$$\Box\vec{E} = -\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2\right)\vec{E} = 0 \Rightarrow \omega^2 = c^2\vec{k}^2 = c^2k^2$$

$\omega = ck$ (Dispersions-Relation)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \; ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \; ; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \; \text{Frequenz}$$

λ ↑ Wellenlänge, T ↑ Schwingungsdauer

$$\vec{E} = E_0 \exp\left[ik\left(\vec{n}\cdot\vec{x} - ct\right)\right]$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}$$

↑ Lichtgeschw. $\hat{=}$ Ausbr.-Geschw. em. Wellen

$$\vec{E}\times\vec{B} \propto \vec{n}$$

1 2 3

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{E},\vec{B}$$

Ret. Potentiale

hom. Maxwellgln. $\Rightarrow$ $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Vektorpotential

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\Phi$$

skalares Pot.

$$\vec{\nabla}\vec{A} + \# \partial_t \Phi = 0 \quad \text{(Lorenz-Eichung)}$$

$$\Box \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\Box \Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{A}(t,\vec{x}) \\ \Phi(t,\vec{x}) \end{matrix}\right\} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \left.\begin{matrix} \mu_0 \vec{j}(t',\vec{x}') \\ \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t',\vec{x}') \end{matrix}\right\} \cdot \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$t' = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$$

endliche Signalausbreitungsgeschw.