H. van Hees **Sommersemester 2022**

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 8

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Faltungssatz für Fourier-Transformationen

Wir betrachten die Fourier-Transformation und ihre Umkehrung für zeitabhängige Funktionen, die durch

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t f(t) \exp(\mathrm{i}\omega t), \\ f(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tilde{f}(\omega) \exp(-\mathrm{i}\omega t) \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben sind.

Die Faltung zweier Funktionen f und g im Zeitbereich ist durch

$$h(t) = f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' f(t-t') g(t') \tag{2}$$

definiert. Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformierten dieser Funktion

$$\tilde{h}(\omega) = \widetilde{f * g}(\omega) = \tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega) \tag{3}$$

gilt.

Tip: Bei der Rechnung ist die Formel

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \exp(-\mathrm{i}\omega t) = 2\pi\delta(\omega) \tag{4}$$

nützlich.

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Fourier-Darstellung elektromagnetischer Wellen

Es seien die Ladungs- und Stromverteilung durch ihre Fourier-Darstellung bzgl. der Zeit

$$\begin{aligned} \rho(t,\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tilde{\rho}(\omega,\vec{x}) \exp(-\mathrm{i}\omega t), \\ \vec{j}(t,\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tilde{\vec{j}}(\omega,\vec{x}) \exp(-\mathrm{i}\omega t), \end{aligned} \tag{5}$$

gegeben.

(a) **[2 Punkte]** Berechnen Sie die Fourier-Transformierte

$$\tilde{D}_{\text{ret}}(\omega,\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t D_{\text{ret}}(t,\vec{x}) \exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{6}$$

der retardierten Green-Funktion

$$D_{\text{ret}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad \text{mit} \quad r = |\vec{x}| \tag{7}$$

des D'Alembert-Operators und interpretieren Sie das Resultat physikalisch.

(b) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie mit Hilfe des Faltungssatzes aus der vorigen Aufgabe die Fourier-Transformierten $\tilde{\Phi}(\omega, \vec{x})$ und $\tilde{\vec{A}}(\omega, \vec{x})$ der retardierten Lösungen der Maxwell-Gleichungen für die Potentiale in Lorenz-Eichung

$$\begin{aligned} \Phi(t,\vec{x}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x' D_{\text{ret}}(t-t', \vec{x}-\vec{x}') \rho(t', \vec{x}'), \\ \vec{A}(t,\vec{x}) &= \mu_0 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t' \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x' D_{\text{ret}}(t-t', \vec{x}-\vec{x}') \vec{j}(t', \vec{x}') \end{aligned} \tag{8}$$

Wir nehmen dabei an, dass die Ladungen und Ströme für $|\vec{x}| = r > R$, also außerhalb einer Kugel vom Radius R um den Ursprung verschwinden. Geben Sie die einfachste Näherung für das „Fernfeld" bei $r \gg R$ an.

(c) **[4 Punkte]** Berechnen Sie die Fourier-Transformierten der Felder, die wegen $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A}$ und $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ durch

$$\tilde{\vec{E}}(\omega, \vec{x}) = -\vec{\nabla}\tilde{\Phi}(\omega, \vec{x}) + \mathrm{i}\omega \tilde{\vec{A}}(\omega, \vec{x}), \quad \tilde{\vec{B}}(\omega, \vec{x}) = \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{A}}(\omega, \vec{x}) \tag{9}$$

gegeben sind.

Behalten Sie auch hier wieder nur die führende Ordnung $\mathcal{O}(1/r)$ in Potenzen von $1/r$ („Fernfelder") bei.