H. van Hees **Sommersemester 2023**

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 11

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Energie-, Impuls- und Drehimpulsdichte einer ebenen Welle

Wir betrachten eine allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen in Form einer sich in x_3-Richtung ausbreitenden elektromagnetischen Welle (s. auch Abschnitt 2.6 im Skript). Wir rechnen zunächst mit komplexwertigen Vektoren $\vec{E}_c$ und $\vec{B}_c$. Die reellen physikalischen Felder sind dann $\vec{E} = \mathrm{Re}\,\vec{E}_c$ und $\vec{B} = \mathrm{Re}\,\vec{B}_c$. Wir gehen von dem Ansatz

$$\vec{E}_c(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \exp(-\mathrm{i}\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \exp[-\mathrm{i}k(ct - x_3)] \tag{1}$$

aus. Dabei haben wir bereits ausgenutzt, dass das elektrische Feld transversal ist, also $\vec{k}\cdot\vec{E}_c = 0$ ist, wobei wir hier $\vec{k} = k\vec{e}_3$ angenommen haben; es seien $\hat{E}_1, \hat{E}_2 \in \mathbb{R}$ und $\phi \in [0, 2\pi)$. Außerdem haben wir bereits die Dispersionsrelation $\omega = ck$ für elektromagnetische Wellen verwendet.

Die Maxwell-Gleichungen mit $\rho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$ lauten

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} = 0, \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0. \tag{5}$$

(a) (3 Punkte) Verwenden Sie die Maxwell-Gleichungen, um zu zeigen, dass

$$\vec{B}_c(t,\vec{x}) = \frac{1}{c}\vec{e}_3 \times \vec{E}_c(t,\vec{x}) \tag{6}$$

ist.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie nun die physikalischen Felder $\vec{E} = \mathrm{Re}\,\vec{E}_c$ und $\vec{B} = \mathrm{Re}\,\vec{B}_c$

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Energiedichte w, die Impulsdichte $\vec{g}$ und die Drehimpulsdichte $\vec{J} = \vec{x} \times \vec{g}$ des elektromagnetischen Feldes (vgl. Skript Abschnitte 2.8-2.10).

(d) (2 Punkte) Unser Auge kann die schnellen Schwingungen von Licht nicht auflösen. Eine ebene Welle erscheint uns einfach als zeitlich konstant leuchtendes Licht. Die Intensität des Lichtes ist dabei das Zeitmittel der Energiedichte. Da die ebene Welle eine periodische Lösung der Maxwellgleichungen mit der zeitlichen Periode $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(ck)$ ist, erfolgt die Mittelung über diese Periodendauer:

$$\langle w(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, w(t,\vec{x}). \tag{7}$$

(e) (1 Punkt) Berechnen Sie auch die entsprechenden Zeitmittel über die Impuls- und Drehimpulsdichte.

(f) (2 Zusatzpunkte) **Zum Knobeln:** Was folgt für Gesamtenergie, -impuls und -drehimpuls der ebenen Wellen. Kann es solche Felder in der Natur wirklich geben?