Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 1

Aufgabe 1

Man nennt die Polarisationszustände

$$|\epsilon_{\mathrm{L}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + \mathrm{i}\,|e_2\rangle) \quad \text{und} \quad |\epsilon_{\mathrm{R}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle - \mathrm{i}\,|e_2\rangle) \tag{1}$$

links- bzw. rechtszirkular polarisierte Photonen.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt ein linkszirkular polarisiertes Photon (Zustand $|\epsilon_{\mathrm{L}}\rangle$) durch einen gegen die x_1-Achse um den Winkel α verdrehten Polarisationsfilter? (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $|\epsilon_{\mathrm{L}}\rangle$ und $|\epsilon_{\mathrm{R}}\rangle$ eine vollständige Orthonormalbasis im (2D!) Hilbert-Raum der Polarisationszustände bilden. (2 Punkte)

(c) Drücken Sie die Polarisationszustände $|e_1\rangle$ und $|e_2\rangle$ (für in x_1- bzw. x_2-Richtung linear polarisierte Photonen) durch die Basis zirkularer Polarisationszustände aus. (3 Punkte)

(d) Wie rechnen sich die Komponenten eines beliebigen Polarisationszustandes $|\psi\rangle$ bzgl. dieser beiden Orthonormalbasen ineinander um, d.h. wie hängen

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ \psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} \tag{2}$$

miteinander zusammen. (2 Punkte)

Tip: Die Komponenten sind durch

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1 | \psi \rangle \\ \langle e_2 | \psi \rangle \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ \psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \epsilon_{\mathrm{L}} | \psi \rangle \\ \langle \epsilon_{\mathrm{R}} | \psi \rangle \end{pmatrix} \tag{3}$$

gegeben, und die Vollständigkeit der Orthonormalsysteme besagt, dass

$$|e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2| = |\epsilon_{\mathrm{L}}\rangle\langle\epsilon_{\mathrm{L}}| + |\epsilon_{\mathrm{R}}\rangle\langle\epsilon_{\mathrm{R}}| = \mathbb{1} \tag{4}$$

gilt.

---

bitte wenden!

Aufgabe 2: Gauß-Integrale

Wir betrachten die Gauß-Verteilung für eine reelle Zufallsvariable $x \in \mathbb{R}$

$$W(x) = N \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta x^2}\right]. \tag{5}$$

Um die Normierung zu bestimmen und Erwartungswerte und Momente der Verteilung zu berechnen, benötigt man einige Integrale, die wir in dieser Übung herleiten wollen. Dabei ist $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $\Delta x > 0$.

(a) Zuerst bestimmen wir das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right), \quad a > 0. \tag{6}$$

Dazu schreiben wir

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{y^2}{a^2}\right). \tag{7}$$

Dies können wir als Flächenintegral über die ganze Ebene $\mathbb{R}^2$ uminterpretieren.

Führen Sie Polarkoordinaten $(x,y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ ein. Dann lässt sich das Integral leicht durch Substitution lösen, und da $I > 0$ ist, ist damit auch I bestimmt.

Hinweis: Das Ergebnis ist $I = a\sqrt{\pi}$.

(b) Berechnen Sie mit einer geeigneten Substitution aus dem Ergebnis der vorigen Teilaufgabe die „erzeugende Funktion"

$$Z(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, W(x) \exp(\lambda x) \tag{8}$$

und bestimmen Sie den Normierungsfaktor N so, dass $Z(\lambda = 0) = 1$ wird, d.h. so, dass $W(x)$ ordnungsgemäß auf Eins normiert ist.

Hinweis: Mit der korrekt gewählten Normierungskonstante lautet das Ergebnis

$$Z(\lambda) = \exp\left(\lambda x_0 + \frac{\lambda^2 \Delta x^2}{2}\right). \tag{9}$$

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Ableitungen $Z'(\lambda)$ und $Z''(\lambda)$ die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\left\langle x^2 \right\rangle$ und daraus die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.