**H. van Hees** **Wintersemester 2018/2019**

# Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 4

---

**Aufgabe 1: Operatorgymnastik**

Im Folgenden seien $\hat{A}, \hat{B}, \ldots$ irgendwelche (nicht notwendig selbstadjungierte Operatoren. Die Definition des zu $\hat{A}$ adjungierten Operators $\hat{A}^\dagger$ ist, dass für alle Vektoren $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ stets

$$\left\langle \psi \middle| \hat{A} \middle| \phi \right\rangle = \left\langle \hat{A}^\dagger \psi \middle| \phi \right\rangle \tag{1}$$

gilt.

Weiterhin ist für zwei Operatoren der Kommutator durch

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{2}$$

definiert. Zeigen Sie folgende Identitäten

(a) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$.

(b) $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]^\dagger = -\left[\hat{A}^\dagger, \hat{B}^\dagger\right]$.

(c) $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C}$.

(d) $\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}$.

---

**Aufgabe 2: Heisenbergbild der Zeitentwicklung**

In der Vorlesung haben wir die Zeitabhängigkeit bei der dynamischen Entwicklung des Systems vollständig auf die Zustandsvektoren bezogen. Die Observablen repräsentierenden selbstadjungierten Operatoren wurden als zeitunabhängig angenommen. Dies ist das sog. **Schrödinger-Bild der Zeitentwicklung**, weil es der natürlichen Formulierung der Wellenmechanik (also der Quantentheorie in der Ortsdarstellung) entspricht. Demnach gilt für den Zustandsvektor im Schrödingerbild

$$|\psi_{\mathrm{S}}(t)\rangle = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t\right)|\psi_0\rangle = \hat{U}(t)|\psi_0\rangle, \tag{3}$$

wobei $\hat{H}$ der Hamiltonoperator ist; $|\psi_0\rangle$ ist der Zustandsvektor zur Anfangszeit $t = 0$. Für den Erwartungswert einer beliebigen Observablen $A$ gilt dann

$$\langle A\rangle(t) = \left\langle \psi_{\mathrm{S}}(t) \middle| \hat{A}_{\mathrm{S}} \middle| \psi_{\mathrm{S}}(t) \right\rangle. \tag{4}$$

Dabei ist $\hat{A}_{\mathrm{S}}$ der selbstadjungierte zeitunabhängige Operator, der $A$ im Schrödinger-Bild repräsentiert. Zeigen Sie, dass man stattdessen mittels der Transformationen

$$|\psi_{\mathrm{H}}(t)\rangle = \hat{U}^{-1}(t)|\psi_{\mathrm{S}}(t)\rangle, \quad \hat{A}_{\mathrm{H}}(t) = \hat{U}^{-1}(t)\hat{A}_{\mathrm{S}}\hat{U}(t) \tag{5}$$

einen äquivalenten Formalismus erhält, wo die Zustandsvektoren zeitunabhängig sind, dafür aber die Observablen-Operatoren zeitabhängig sind, indem Sie zeigen, dass

(a) $\hat{U}(t)$ unitär ist, d.h. es existiert ein zu $\hat{U}(t)$ inverser Operator und es ist $\hat{U}^{-1}(t) = \hat{U}^{\dagger}(t)$, d.h. es ist $\hat{U}^{\dagger}(t)\hat{U}(t) = \hat{U}(t)\hat{U}^{\dagger}(t) = \mathbb{1}$

(b) und deshalb $\hat{A}_{\mathrm{H}}(t)$ ein selbstadjungierter Operator ist.

(c) $|\psi_{\mathrm{H}}(t)\rangle = |\psi_0\rangle = \text{const}$ ist.

(d) $\langle A\rangle(t) = \left\langle \psi_{\mathrm{H}}(t) \middle| \hat{A}_{\mathrm{H}}(t) \middle| \psi_{\mathrm{H}}(t)\right\rangle$ ist.

(e) $\hat{H}_{\mathrm{H}}(t) = \hat{H}_{\mathrm{S}} = \hat{H} = \text{const}$ ist.

(f) im Heisenbergbild der Operator, der $\dot{A}$ repräsentiert durch die gewöhnliche Zeitableitung realisiert wird, d.h. dass

$$\mathring{\hat{A}}_{\mathrm{H}}(t) = \hat{U}^{-1}(t)\mathring{\hat{A}}_{\mathrm{S}}\hat{U}(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{A}_{\mathrm{H}}(t), \hat{H}_{\mathrm{H}}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{A}_{\mathrm{H}}(t) \tag{6}$$

ist.

(g) Seien $|a_{\mathrm{S}}\rangle$ ein vollständiger orthonormierter Satz von Eigenvektoren des Observablen-Operators $\hat{A}_{\mathrm{S}}$ im Schrödinger-Bild. Zeigen Sie, dass dann $|a_{\mathrm{H}}(t)\rangle = \hat{U}^{-1}(t)\,|a_{\mathrm{S}}\rangle$ ein vollständiger orthonormierter Satz von Eigenvektoren des entsprechenden Observablen-Operators $\hat{A}_{\mathrm{H}}(t)$ im Heisenberg-Bild ist und dass die Wahrscheinlichkeiten von Messresultaten in beiden Bildern identisch sind, d.h. dass stets $W(t,a) = |\langle a_{\mathrm{S}} \,|\, \psi_{\mathrm{S}}(t)\rangle|^2 = |\langle a_{\mathrm{H}}(t) \,|\, \psi_{\mathrm{H}}(t)\rangle|^2$ gilt.

**Bemerkung:** Diese Formulierung der Zeitentwicklung, wo die Zustandsvektoren zeitunabhängig sind und sich die Observablenoperatoren zeitlich analog wie in der klassischen Hamiltonschen Mechanik entwickeln (wobei den Kommutatoren in der Quantentheorie die Poisson-Klammern in der klassischen Mechanik analog sind), das **Heisenberg-Bild der Zeitentwicklung**, weil dies der Heisenbergschen Formulierung der Quantentheorie in Form der sog. Matrizenmechanik entspricht. Wie sich in unserem abstrakten Bra-Ket-Formalismus (die dritte Version der Quantentheorie, die von Dirac entwickelt wurde) zeigt, sind diese beiden Formulierungen vollständig äquivalent, d.h. alle physikalischen Vorhersagen über Wahrscheinlichkeiten von Messresultaten und Erwartungswerten von Operatoren sind in beiden Versionen der Quantentheorie identisch.

---

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://th.physik.uni-frankfurt.de/~hees/theo3-l3-WS1819/index.html`