H. van Hees **Wintersemester 2022/2023**

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 4

Aufgabe 1 (10 Punkte): Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und Dreiecksungleichung

Das Skalarprodukt für zwei Wellenfunktionen ψ und ϕ ist durch

$$\langle \psi \,|\, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \, \psi^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \tag{1}$$

definiert und die Norm der Wellenfunktion ψ durch

$$||\psi|| = \sqrt{\langle \psi \,|\, \psi \rangle}. \tag{2}$$

Es ist zu beachten, dass es sich beim Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$ um einen komplexen Vektorraum handelt und daher im Skalarprodukt das linke Argument konjugiert komplex eingeht.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass das für beliebige Wellenfunktionen ψ, ϕ_1 und ϕ_2 und beliebige Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\langle \psi \,|\, \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \psi \,|\, \phi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \psi \,|\, \phi_2 \rangle \tag{3}$$

und für beliebige Wellenfunktionen ψ und ϕ

$$\langle \psi \,|\, \phi \rangle = \langle \phi \,|\, \psi \rangle^* \tag{4}$$

sowie für Wellenfunktionen ψ_1, ψ_2 und ϕ und beliebige Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\langle \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \,|\, \phi \rangle = \lambda_1^* \langle \psi_1 \,|\, \phi \rangle + \lambda_2^* \langle \psi_2 \,|\, \phi \rangle \tag{5}$$

gilt.

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für beliebige Wellenfunktionen ψ und ϕ stets die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle \psi | \phi \rangle| \leq ||\psi|| \, ||\phi|| \tag{6}$$

gilt. Die Gln. (3-5) definieren das Skalarprodukt als eine sog. **Sesquilinearform**.

Hinweis: Verwenden Sie die positive Definitheit des Skalarprodukts für die Wellenfunktion $\psi - \lambda \phi$ für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\langle \psi - \lambda \phi \,|\, \psi - \lambda \phi \rangle \geq 0, \tag{7}$$

indem sie zunächst das Skalarprodukt ausmultiplizieren und dann

$$\lambda = \frac{\langle \phi \,|\, \psi \rangle}{||\phi||^2} \tag{8}$$

setzen.

(c) (3 Punkte) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

$$||\psi + \phi|| \leq ||\psi|| + ||\phi||. \tag{9}$$

Hinweis: Argumentieren Sie zuerst, dass immer

$$\langle \psi | \phi \rangle + \langle \phi | \psi \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle \psi | \phi \rangle \leq 2 | \langle \psi | \phi \rangle | \tag{10}$$

sein muss. Multiplizieren Sie nun

$$||\psi + \phi||^2 = \langle \psi + \phi | \psi + \phi \rangle \tag{11}$$

aus und verwenden dann (10) und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (1), um zu beweisen, dass

$$||\psi + \phi||^2 \leq (||\psi|| + ||\phi||)^2 \tag{12}$$

ist, was äquivalent zur Dreieicksungleichung (9) ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Operatorgymnastik

Im Folgenden seien $\hat{A}, \hat{B}, \ldots$ irgendwelche (nicht notwendig selbstadjungierte Operatoren. Die Definition des zu $\hat{A}$ adjungierten Operators $\hat{A}^\dagger$ ist, dass für alle Wellenfunktionen ψ und ϕ stets

$$\left\langle \psi \middle| \hat{A} \phi \right\rangle = \left\langle \hat{A}^\dagger \psi \middle| \phi \right\rangle \tag{13}$$

gilt.

Weiterhin ist für zwei Operatoren der Kommutator durch

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{14}$$

definiert. Zeigen Sie folgende Identitäten

(a) (2 Punkte) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$.

(b) (2 Punkte) $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]^\dagger = -\left[\hat{A}^\dagger, \hat{B}^\dagger\right]$.

(c) (3 Punkte) $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C}$.

(d) (3 Punkte) $\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}$.
