H. van Hees **Wintersemester 2023/2024**

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 2
Lösung

Aufgabe 1 [15 Punkte]: Freie Teilchen: Gaußsches Wellenpaket

Wir suchen eine Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(t,x). \tag{1}$$

mittels eines Fourier-Integralansatzes:

$$\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} A(t,k)\exp(\mathrm{i}kx). \tag{2}$$

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie durch Einsetzen des Ansatzes in die Schrödinger-Gleichung, dass für A die Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t A = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 A(t,k) \tag{3}$$

gilt.

Lösung: Wir dürfen die Ableitungen in (1) für den Ansatz (2) unter dem Integral ausführen, d.h. wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\mathrm{i}\hbar\partial_t A(t,k)\exp(\mathrm{i}kx) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}A(t,k)\exp(\mathrm{i}kx). \tag{4}$$

Da die Fourier-Transformation umkehrbar eindeutig ist, folgt daraus, dass A (3) erfüllen muss.

(b) (3 Punkte) Lösen Sie diese Gleichung für die Anfangsbedingung

$$A(0,k) = A_0(k). \tag{5}$$

Lösung: Die Gleichung (3) können wir durch $\mathrm{i}\hbar A(t,k)$ dividieren. Das liefert

$$\frac{1}{A}\partial_t A = -\frac{\mathrm{i}\hbar k^2}{2m}. \tag{6}$$

Integrieren wir nun beide Seiten der Gleichung nach t, erhalten wir unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (5)

$$\int_0^t \mathrm{d}t' \frac{1}{A(t',k)}\partial_{t'}A(t',k) = \ln\left[\frac{A(t,k)}{A_0(k)}\right] = -\frac{\mathrm{i}\hbar k^2}{2m}\int_0^t \mathrm{d}t' = -\frac{\mathrm{i}\hbar k^2 t}{2m}. \tag{7}$$

Dies lässt sich leicht auflösen zu

$$A(t,k) = A_0(k)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\hbar k^2 t}{2m}\right). \tag{8}$$

(c) (5 Punkte) Betrachten Sie nun den Fall einer Gaußschen Anfangsbedingung im k-Raum

$$A_0(k) = N \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \tag{9}$$

mit $N = \text{const}$ und zeigen Sie durch Einsetzen in (2), dass sich für die Wellenfunktion

$$\psi(t,x) = \frac{N}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi n \Delta k^2}{m + 2\mathrm{i}\hbar\Delta k^2 t}} \exp\left[-\frac{m^2\Delta k^2}{m^2 + 4\hbar^2\Delta k^4 t^2}\left(x - \frac{\hbar k_0 t}{m}\right)^2 + \mathrm{i}\Phi(t,x)\right] \tag{10}$$

mit der Phase

$$\Phi(t,x) = \frac{m\Delta k^2}{m^2 + 4\hbar^2\Delta k^4 t^2}\left(2\hbar\Delta k^2 x^2 t + \frac{m x k_0}{\Delta k^2} - \frac{\hbar k_0^2 t}{2\Delta k^2}\right) \tag{11}$$

ergibt.

Hinweis 1: Sie können die Formel für das allgemeine Gauß-Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k \exp(-ak^2 + bk) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right), \tag{12}$$

die für $\operatorname{Re} a > 0$ gilt, ohne Beweis verwenden. Außerdem ist Anhang D im Skript zur Theoretischen Physik II [`Link zum pdf`] nützlich.

Hinweis 2: Sie können die beiden letzten Aufgaben auch bearbeiten, wenn Sie diesen Aufgabenteil nicht bis zu Ende gelöst haben, denn Sie benötigen nur das Endergebnis (10).

Lösung: Setzen wir (9) in (8) und dies schließlich in (2) ein, ergibt sich

$$\psi(t,x) = N\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \exp\left(-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2} - \mathrm{i}\frac{\hbar k^2 t}{2m} + \mathrm{i}kx\right). \tag{13}$$

Ausmultiplizieren des Arguments der Expanentialfunktion liefert

$$\begin{aligned}\psi(t,x) &= \frac{N}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k \exp\left[-k^2\left(\frac{1}{4\Delta k^2} + \frac{\mathrm{i}\hbar t}{2m}\right) + k\left(\mathrm{i}x + \frac{k_0}{2\Delta k^2}\right) - \frac{k_0^2}{4\Delta k^2}\right] \\ &= \frac{N}{2\pi}\exp\left(-\frac{k_0^2}{4\Delta k^2}\right)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k \exp\left[-k^2\left(\frac{1}{4\Delta k^2} + \frac{\mathrm{i}\hbar t}{2m}\right) + k\left(\mathrm{i}x + \frac{k_0}{2\Delta k^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{14}$$

Für das verbliebene Integral können wir (12) direkt anwenden:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k \exp\left[-k^2\left(\frac{1}{4\Delta k^2} + \frac{\mathrm{i}\hbar t}{2m}\right) + k\left(\mathrm{i}x + \frac{k_0}{2\Delta k^2}\right)\right] = &\sqrt{\frac{\pi}{1/(4\Delta k^2) + \mathrm{i}\hbar t/(2m)}} \\ &\exp\left\{\frac{[\mathrm{i}x + k_0/(2\Delta k)^2]^2}{1/\Delta k^2 + 2\mathrm{i}\hbar t/m}\right\}.\end{aligned} \tag{15}$$

Um das Betragsquadrat bilden zu können, müssen wir das Argument der Exponentialfunktion nach Real- und Imaginärteil aufspalten. Dazu machen wir zunächst den Nenner reell, indem wir mit dem konjugiert Komplexen desselben erweitern und dann den Zähler ausmultiplizieren

$$
\begin{aligned}
\frac{[\mathrm{i}x+k_0/(2\Delta k)^2]^2}{1/\Delta k^2+2\mathrm{i}\hbar t/m} &= \frac{[\mathrm{i}x+k_0/(2\Delta k)^2]^2}{1/\Delta k^2+2\mathrm{i}\hbar t/m}\,\frac{1/\Delta k^2-2\mathrm{i}\hbar t/m}{1/\Delta k^2-2\mathrm{i}\hbar t/m}\\
&= \frac{[\mathrm{i}x+k_0/(2\Delta k)^2]^2(1/\Delta k^2-2\mathrm{i}\hbar t/m)}{1/(\Delta k^4)+4\hbar^2t^2/m^2}\\
&= \frac{[-x^2+2\mathrm{i}xk_0/(2\Delta k)^2+k_0^2/(2\Delta k)^4](1/\Delta k^2-2\mathrm{i}\hbar t/m)}{1/(\Delta k^4)+4\hbar^2t^2/m^2}\\
&= \frac{\Delta k^2 m}{m^2+4\hbar^2\Delta k^4t^2}\left(-x^2+\frac{\mathrm{i}xk_0}{\Delta k^2}+\frac{k_0^2}{4\Delta k^4}\right)\\
&= \frac{\Delta k^2 m}{m^2+4\hbar^2\Delta k^4t^2}\left[\left(-mx^2+\frac{mk_0^2}{4\Delta k^4}+2\hbar k_0tx\right)\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{i}\left(\frac{mk_0x}{\Delta k^2}+2\hbar\Delta k^2x^2t-\frac{\hbar k_0^2t}{2\Delta k^2}\right)\right]\\
&= \frac{\Delta k^2 m}{m^2+4\hbar^2\Delta k^4t^2}\left[\left(-m\left(x-\frac{\hbar k_0t}{m}\right)^2+\frac{\hbar^2k_0^2t^2}{m}+\frac{mk_0^2}{4\Delta k^4}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{i}\left(\frac{mk_0x}{\Delta k^2}+2\hbar\Delta k^2x^2t-\frac{\hbar k_0^2t}{2\Delta k^2}\right)\right]\\
&= -\frac{m^2\Delta k^2}{m^2+4\hbar^2\Delta k^4t^2}\left(x-\frac{\hbar k_0t}{m}\right)^2+\frac{k_0^2}{4\Delta k^4}\\
&\qquad+\mathrm{i}\frac{\Delta k^2 m}{m^2+4\hbar^2\Delta k^4t^2}\left(\frac{mk_0x}{\Delta k^2}+2\hbar\Delta k^2x^2t-\frac{\hbar k_0^2t}{2\Delta k^2}\right)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Setzt man dies nun zunächst in (15) und dann schließlich in (14) ein, folgen in der Tat (10) und (11).

(d) (3 Punkte) Berechnen Sie die Ortswahrscheinlichkeitsverteilung $P(t,\vec{x})=|\psi(t,\vec{x})|^2$.

Lösung: Zur Bildung des Betragsquadrats, bemerken wir, dass der Beitrag vom Phasenfaktor $|\exp[\mathrm{i}\Phi(t,x)]|^2=1$ liefert. Weiter dürfen im Vorfaktor das Betragsquadrat im Nenner unter der Wurzel ausführen, d.h. es gilt

$$
\left|\frac{N}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi m\Delta k^2}{m+2\mathrm{i}\hbar\Delta k^2t}}\right|^2=\frac{|N|^2m\Delta k^2}{\pi\sqrt{m^2+4\hbar^2\Delta k^4t^2}}
\tag{17}
$$

und damit schlielich für die Ortswahrscheinlichkeitsverteilung

$$
P(t,x)=\frac{|N|^2m\Delta k^2}{\pi\sqrt{m^2+4\hbar^2\Delta k^4t^2}}\exp\left[-\frac{2m^2\Delta k^2}{m^2+4\hbar^2\Delta k^4t^2}\left(x-\frac{\hbar k_0t}{m}\right)^2\right].
\tag{18}
$$

(e) (2 Punkte) Lesen Sie Mittelwert und Standardabweichung für den Ort x ab und interpretieren Sie das Resultat physikalisch. **Hinweis:** Sie dürfen verwenden, dass eine Gauß-Verteilung für x mit Mittelwert x_0 und Standardabweichung Δx durch

$$
P(x)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta x}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta x^2}\right]
\tag{19}
$$

gegeben ist.

Lösung: Wir bemerken als erstes, dass durch Vergleich für den Normierungsfaktor $|N|^2$ von (18) mit (19) folgt, dass $|N|^2 = \sqrt{2\pi}/\Delta k = \text{const}$ ist. Aus dem Argument der Exponentialfunktion in (18) liest man ab, dass

$$\langle x \rangle(t) = \frac{\hbar k_0}{m} t, \quad \Delta x(t) = \frac{\sqrt{m^2 + 4\hbar^2 \Delta k^4 t^2}}{2m\Delta k}. \tag{20}$$

ist.

Der Erwartungswert genügt also der Bewegung eines freien Teilchens mit der Geschwindigkeit $v = \hbar k_0/m = p_0/m$, was mit der de Broglie-Materiewellenidee übereinstimmt, d.h. wir haben $p_0 = \hbar k_0$ für den (mittleren) Anfangsimpuls des Teilchens.

Der Ort ist allerdings nicht exakt bestimmt. Die Standardabweichung Δx ist ein Maß für die Breite der Gauß=Verteilung, und wir sehen aus (20), dass diese Breite mit der Zeit immer größer wird, d.h. selbst wenn wir zu Beginn (bei $t = 0$) den Ort des Teilchens ziemlich genau festlegen, wird die Unsicherheit über den Ort des Teilchens mit der Zeit immer größer.