

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 3

Aufgabe 1 (10 Punkte): Potentialtopf

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens auf der x -Achse in einem Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, a], \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1)$$

Damit ist die Bewegung des Teilchens auf das Intervall $x \in [0, a]$ beschränkt, und die Wellenfunktionen müssen die Randbedingungen

$$\psi(a) = \psi(0) = 0 \quad (2)$$

erfüllen. Der Hamilton-Operator ist innerhalb des Topfes der eines freien Teilchens

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2. \quad (3)$$

Bemerkung: In den Übungen bezeichnen wir Operatoren mit einem „Dach“ über dem Symbol (also hier den Hamilton-Operator mit \hat{H} statt mit \mathbf{H}), weil sich das beim Rechnen besser notieren lässt als fettgedruckte Symbole wie im Manuskript.

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass \hat{H} auf dem Hilbert-Raum der über das Intervall $[0, a]$ quadratintegrierbaren Funktionen $L^2([0, a])$ selbstadjungiert ist.

Hinweis: Sie müssen zeigen, dass für zwei beliebige Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 stets $\langle \psi_1 | \hat{H} \psi_2 \rangle = \langle \hat{H} \psi_1 | \psi_2 \rangle$ gilt, wobei das Skalarprodukt zwischen zwei Wellenfunktionen durch

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_0^a dx \psi_1^*(x) \psi_2(x) \quad (4)$$

definiert ist.

Lösung: Da $\hat{H} = -\hbar^2/(2m)\partial_x^2$ ist, genügt es zu zeigen, dass ∂_x^2 selbstadjungiert ist. Dies gelingt durch zweimalige partielle Integration:

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \partial_x^2 \psi_2 \rangle &= \int_0^a dx \psi_1^*(x) \partial_x^2 \psi_2(x) \\ &= \psi_1^*(x) \partial_x \psi_2(x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a dx [\partial_x \psi_1^*(x)] \partial_x \psi_2(x) \\ &\stackrel{(2)}{=} - \int_0^a dx [\partial_x \psi_1^*(x)] \partial_x \psi_2(x) \\ &= -\partial_x \psi_1^*(x) \psi_2(x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \int_0^a dx [\partial_x^2 \psi_1^*(x)] \psi_2(x) \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_0^a dx [\partial_x^2 \psi_1^*(x)] \psi_2(x) \\ &= \langle \partial_x^2 \psi_1 | \psi_2 \rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

und das war zu zeigen.

- (b) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Energie-Eigenzustände und die dazugehörigen Energie-Eigenwerte aus der entsprechenden Eigenwertgleichung

$$\hat{H}u_E(x) = Eu_E(x). \quad (6)$$

Lösung: Setzen wir den Hamilton-Operator (3) in (6) ein, erhalten wir die DGL

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u_E''(x) = Eu_E(x) \Rightarrow u_E''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}u_E(x). \quad (7)$$

Für jedes $E > 0$ ist offenbar die allgemeine Lösung

$$u_E(x) = A \cos(k_E x) + B \sin(k_E x) \quad \text{mit} \quad k_E = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad (8)$$

mit Konstanten A und B . Diese sind so zu bestimmen, dass die Randbedingungen (2) erfüllt sind. Aus $u_E(0) = 0$ folgt, dass $A = 0$ ist. Damit die zweite Randbedingung $u_E(a) = 0$ für $B \neq 0$ erfüllt ist, muss

$$k_n a = n\pi \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \quad (9)$$

sein. Die dazugehörigen Energie-Eigenwerte sind

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}. \quad (10)$$

- (c) (3 Punkte) Normieren Sie die Energie-Eigenzustände so, dass

$$\int_0^a dx |u_E(x)|^2 = 1 \quad (11)$$

ist.

Lösung: Wir müssen das Integral

$$\langle u_n | u_n \rangle = \int_0^a dx |B|^2 \sin^2(k_n x) \quad (12)$$

berechnen. Dazu verwenden wir das Doppelwinkeltheorem für den Cosinus:

$$\cos(2k_n x) = \cos^2(k_n x) - \sin^2(k_n x) = 1 - 2\sin^2(k_n x) \Rightarrow \sin^2(k_n x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2k_n x)]. \quad (13)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \langle u_n | u_n \rangle &= \frac{1}{2}|B|^2 \int_0^a dx [1 - \cos(2k_n x)] = \frac{1}{2}|B|^2 \left[x - \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n x) \right]_{x=0}^{x=a} = \frac{a}{2}|B|^2 \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow B &= \sqrt{\frac{2}{a}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Die normierten Eigenzustände sind also

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(k_n x). \quad (15)$$

- (d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass erwartungsgemäß die Energie-Eigenzustände zu verschiedenen Energie-eigenwerten orthogonal sind, d.h.

$$\int_0^a dx u_{E_1}^*(x) u_{E_2}(x) = 0 \quad \text{falls } E_1 \neq E_2. \quad (16)$$

Lösung: Es gilt

$$\langle u_{n_1} | u_{n_2} \rangle = \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin(k_{n_1} x) \sin(k_{n_2} x). \quad (17)$$

Hier verwenden wir das Additionstheorem für den Cosinus

$$\cos[(k_{n_1} + k_{n_2})x] = \cos(k_{n_1} x) \cos(k_{n_2} x) - \sin(k_{n_1} x) \sin(k_{n_2} x) \quad (18)$$

bzw.

$$\cos[(k_{n_1} - k_{n_2})x] = \cos(k_{n_1} x) \cos(k_{n_2} x) + \sin(k_{n_1} x) \sin(k_{n_2} x) \quad (19)$$

Subtrahiert man (18) von (19), erhält man

$$2 \sin(k_{n_1} x) \sin(k_{n_2} x) = \cos[(k_{n_1} - k_{n_2})x] - \cos[(k_{n_1} + k_{n_2})x] \quad (20)$$

Damit wird für $n_1 \neq n_2$

$$\begin{aligned} \langle u_{n_1} | u_{n_2} \rangle &= \frac{1}{a} \int_0^a dx \left\{ \cos[(k_{n_1} - k_{n_2})x] - \cos[(k_{n_1} + k_{n_2})x] \right\} \\ &= \frac{1}{a} \left\{ \frac{\sin[(k_{n_1} - k_{n_2})x]}{k_{n_1} - k_{n_2}} + \frac{\sin[(k_{n_1} + k_{n_2})x]}{k_{n_1} + k_{n_2}} \right\}_{x=0}^{x=a} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

und das war zu zeigen.

- (e) (Zusatzaufgabe: 3 Extrapunkte) Zeigen Sie, dass für diese (etwas überidealisierte und daher unphysikalische!) Situation keine Impulsobservable definiert werden kann, weil der Impulsoperator $\hat{p} = -i\hbar \partial_x$ nicht selbstadjungiert ist. Verwenden Sie dazu, dass die oben ausgerechneten Energie-Eigenzustände eine vollständige Basis auf dem Hilbert-Raum der über das Intervall $[0, a]$ quadratintegrierbaren Funktionen, die die Randbedingungen (2) erfüllen, bilden, und dass für alle u_E die Anwendung von \hat{p} aus diesem Raum herausführt, d.h. $\hat{p} u_E(x)$ nicht mehr die Randbedingungen erfüllt.

Lösung: Es ist

$$\hat{p} u_n(x) = -i\hbar u_n'(x) = -i\hbar \sqrt{\frac{2}{a}} k_n \cos(k_n x). \quad (22)$$

Damit ist aber $\hat{p} u_n(x)$ für $x = 0$ nicht Null, und folglich liegt $\hat{p} u_n(x)$ nicht mehr im Bereich der Wellenfunktionen für dieses Problem, da es nicht die Randbedingungen (2) erfüllt und damit \hat{p} kein selbstadjungierter Operator auf diesem speziellen Hilbert-Raum ist.