

## Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 Lösungen zu Blatt 8

### Aufgabe 1 (10 Punkte): Bohrscher Radius

Wie in der Vorlesung gezeigt, sind die Energie-Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms durch

$$\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)! a_B^3}} \left(\frac{2r}{na_B}\right)^l \exp\left(-\frac{r}{na_B}\right) L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_B}\right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1)$$

gegeben. Die assoziierten Laguerre-Polynome  $L_{n_r}^k$  und die Kugelflächenfunktionen sind im Skript ausführlich erklärt. Dabei ist

$$a_B = \frac{\hbar}{\alpha m_e c} = 5,29177210903(80) \cdot 10^{-11} \text{ m}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = 7,2973525693(11) \cdot 10^{-3}. \quad (2)$$

Betrachten Sie nun den Grundzustand des Wasserstoffatoms mit den Quantenzahlen  $n = 1$ ,  $l = m = 0$ . Zeigen Sie, dass (1) ordnungsgemäß normiert ist und berechnen Sie den mittleren Abstand zwischen Proton und Elektron.

**Lösung:** Zunächst vereinfacht sich (1) für  $n = 1$  und  $l = m = 0$  wegen Gln. (A.3.14) und (3.12.31) im Skript

$$L_0^1(\xi) = \frac{1}{0!} \xi^{-1} \exp \xi \xi \exp(-\xi) = 1 = \text{const}, \quad Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (3)$$

zu

$$\psi_{100}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{4\pi a_B^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_B}\right). \quad (4)$$

Zunächst berechnen wir das Normierungsintegral:

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\psi_{100}|^2 = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \vartheta |\psi_{100}|^2 = \frac{1}{\pi a_B^3} 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_B}\right) = 1. \quad (5)$$

Damit ergibt sich für den mittleren Abstand

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x r |\psi_{100}|^2 = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r^3 \sin \vartheta |\psi_{100}|^2 \\ &= \frac{1}{\pi a_B^3} 4\pi \int_0^\infty dr r^3 \exp\left(-\frac{2r}{a_B}\right) = \frac{3}{2} a_B. \end{aligned} \quad (6)$$

Zur Berechnung der obigen Integrale bemerken wir, dass wir mit der Funktion

$$f(\lambda) = \int_0^\infty dr \exp(-\lambda r) = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad (7)$$

diese Integrale einfach durch Ableitung nach  $\lambda$  berechnen können, denn offenbar ist

$$f'(\lambda) = \int_0^\infty dr (-r) \exp(-\lambda r), \quad f''(\lambda) = \int_0^\infty dr (-r)^2 \exp(-\lambda r) \quad (8)$$

bzw. allgemein für die  $n$ -te Ableitung

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} f(\lambda) = \int_0^\infty dr (-r)^n \exp(-\lambda r). \quad (9)$$

Demnach ergibt sich wegen  $f'(\lambda) = -1/\lambda^2$  und  $f''(\lambda) = 2/\lambda^3$  und das Integral in (5) zu

$$\int_0^\infty dr r^2 \exp(-2r/a_B) = f''(2/a_B) = \frac{2}{(2/a_B)^3} = \frac{a_B^3}{4}. \quad (10)$$

Für das Integral in (6) benötigen wir noch  $f'''(\lambda) = -6/\lambda^4$ :

$$\int_0^\infty dr r^3 \exp(-2r/a_B) = -f'''(2/a_B) = \frac{6}{(2/a_B)^4} = \frac{6a_B^4}{16} = \frac{3}{8}a_B^4. \quad (11)$$

## Aufgabe 2: Teilchen im Magnetfeld

Wir betrachten den Hamilton-Operator

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} [\vec{\mathbf{p}} - q\vec{A}(\vec{\mathbf{x}})]^2 = \frac{1}{2m} [\vec{\mathbf{p}}^2 - q\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{A}(\vec{\mathbf{x}}) - q\vec{A}(\vec{\mathbf{x}}) \cdot \vec{\mathbf{p}} + q^2 \vec{A}^2(\vec{\mathbf{x}})]. \quad (12)$$

Wir wollen zeigen, dass dies die Bewegung eines Teilchens mit Masse  $m$  und Ladung  $q$  im Magnetfeld

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (13)$$

entspricht. Dazu berechnen wir den Operator der Kraft auf das Teilchen:

- (a) (5 Punkte) Die Komponenten der Geschwindigkeit des Teilchens sind gemäß der allgemeinen Formel für die Operatoren, die die Zeitableitung einer Observablen definieren (s. Skript!) durch

$$\mathbf{v}_j = \dot{\mathbf{x}}_j = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{x}_j, \mathbf{H}] \quad (14)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{v}_j = \frac{1}{m} [\mathbf{p}_j - qA_j(\vec{\mathbf{x}})]. \quad (15)$$

**Bemerkung:** Beachten Sie, dass bei Anwesenheit von Magnetfeldern demnach der quantenmechanische Impuls nicht dem üblichen mechanischen Impuls entspricht sondern dem sog. „kanonischen Impuls“. Für Ortswellenfunktionen entspricht  $\vec{\mathbf{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$  also dem *kanonischen* Impuls und nicht dem gewöhnlichen „kinetischen“ Impuls  $\vec{p}_{\text{kin}} = m\vec{v}$  der klassischen Mechanik.

**Tip:** Dabei sind die allgemeinen Kommutatorrelationen

$$[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k] = [\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = 0, \quad [f(\vec{\mathbf{x}}), \mathbf{p}_j] = i\hbar \partial_j f(\vec{\mathbf{x}}) \quad (16)$$

nützlich. Aus der letzten Gleichung (16) folgt natürlich auch die bekannte Heisenbergsche Kommutatorrelation  $[\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$  als Spezialfall.

**Lösung:** Wir rechnen die für (14) benötigten Kommutatoren von  $\mathbf{x}_j$  mit den in  $\mathbf{H}$  vorkommenden Operatorausdrücken aus. Dabei schreiben wir zur Abkürzung  $\mathbf{A}_j = A_j(\vec{\mathbf{x}})$

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k] &= [\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k] \mathbf{p}_k + \mathbf{p}_k [\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k] = 2i\hbar \delta_{jk} \mathbf{p}_k = 2i\hbar \mathbf{p}_j \\ [\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k \mathbf{A}_k] &= [\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k] \mathbf{A}_k = i\hbar \delta_{jk} \mathbf{A}_k = i\hbar \mathbf{A}_j, \\ [\mathbf{x}_j, \mathbf{A}_k \mathbf{p}_k] &= \mathbf{A}_k [\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k] = i\hbar \delta_{jk} \mathbf{A}_k = i\hbar \mathbf{A}_j, \\ [\mathbf{x}_j, \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k] &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Setzt man dies in (14) ein, erhält man tatsächlich (15).

**Lösung der Zusatzaufgabe:** Wir beweisen die letzte Gleichung von (16). Für eine beliebige Ortswellenfunktion gilt

$$\begin{aligned} f(\vec{\mathbf{x}}) \mathbf{p}_j \psi(\vec{\mathbf{x}}) &= -i\hbar f(\vec{\mathbf{x}}) \partial_j \psi(\vec{\mathbf{x}}), \\ \mathbf{p}_j f(\vec{\mathbf{x}}) \psi(\vec{\mathbf{x}}) &= -i\hbar \partial_j [f(\vec{\mathbf{x}}) \psi(\vec{\mathbf{x}})] = -i\hbar [\psi(\vec{\mathbf{x}}) \partial_j f(\vec{\mathbf{x}}) + f(\vec{\mathbf{x}}) \partial_j \psi(\vec{\mathbf{x}})]. \end{aligned} \tag{18}$$

Ziehen wir die untere von der oberen Gleichung ab, folgt

$$[f(\vec{\mathbf{x}}), \mathbf{p}_j] \psi(\vec{\mathbf{x}}) = [i\hbar \partial_j f(\vec{\mathbf{x}})] \psi(\vec{\mathbf{x}}) = [i\hbar \partial_j f(\vec{\mathbf{x}})] \psi(\vec{\mathbf{x}}). \tag{19}$$

Da dies für beliebige Ortswellenfunktionen gilt ist damit die letzte Kommutatorbeziehung in (16) bewiesen.

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie nun, dass die Operatoren der Kraftkomponenten

$$\mathbf{F}_j = m \dot{\mathbf{v}}_j = \frac{m}{i\hbar} [\mathbf{v}_j, \mathbf{H}] = \frac{q}{2} [\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}}) - \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}}) \times \vec{\mathbf{v}}]_j \tag{20}$$

erfüllen.

**Bemerkung:** Das entspricht der Lorentz-Kraft auf ein Teilchen im Magnetfeld. Die Rechnung ergibt dabei die korrekte Verallgemeinerung von  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{v} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{v})/2$  auf die nicht kommutierenden Operatoren  $\vec{\mathbf{v}}$  und  $\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}})$ , indem diese „symmetrisierte Form“ des Kreuzprodukts selbstadjungierte Operatoren für die Operatoren der Kraftkomponenten liefert.

**Lösung:** Es gilt

$$\mathbf{F}_j = m \dot{\mathbf{v}}_j = \frac{m}{i\hbar} [\mathbf{p}_j - q\mathbf{A}_j, \mathbf{H}] \tag{21}$$

Wir rechnen wieder die einzelnen benötigten Kommutatoren mit Hilfe der Kommutatorregeln in (16) aus:

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k \mathbf{A}_k] &= \mathbf{p}_k [\mathbf{p}_j, \mathbf{A}_k] = -i\hbar \mathbf{p}_k \partial_j \mathbf{A}_k, \\ [\mathbf{p}_j, \mathbf{A}_k \mathbf{p}_k] &= [\mathbf{p}_j, \mathbf{A}_k] \mathbf{p}_k = -i\hbar (\partial_j \mathbf{A}_k) \mathbf{p}_k, \\ [\mathbf{p}_j, \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k] &= [\mathbf{p}_j, \mathbf{A}_k] \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_k [\mathbf{p}_j, \mathbf{A}_k] = -2i\hbar \mathbf{A}_k \partial_j \mathbf{A}_k, \\ [\mathbf{A}_j, \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k] &= [\mathbf{A}_j, \mathbf{p}_k] \mathbf{p}_k + \mathbf{p}_k [\mathbf{A}_j, \mathbf{p}_k] = i\hbar (\partial_k \mathbf{A}_j \mathbf{p}_k + \mathbf{p}_k \partial_k \mathbf{A}_j), \\ [\mathbf{A}_j, \mathbf{p}_k \mathbf{A}_k] &= [\mathbf{A}_j, \mathbf{p}_k] \mathbf{A}_k = i\hbar (\partial_k \mathbf{A}_j) \mathbf{A}_k, \\ [\mathbf{A}_j, \mathbf{A}_k \mathbf{p}_k] &= \mathbf{A}_k [\mathbf{A}_j, \mathbf{p}_k] = i\hbar (\partial_k \mathbf{A}_j) \mathbf{A}_k. \end{aligned} \tag{22}$$

Setzen wir all diese Resultate in (21) ein, erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_j &= \frac{q}{2m} \left[ \mathbf{p}_k (\partial_j \mathbf{A}_k - \partial_k A_j) + (\partial_j \mathbf{A}_k - \partial_k A_j) \mathbf{p}_k \right] - \frac{q^2}{m} (\partial_j \mathbf{A}_k - \partial_k A_j) \mathbf{A}_k \\ &= \frac{q}{2m} \left[ (\mathbf{p}_k - q \mathbf{A}_k) (\partial_j \mathbf{A}_k - \partial_k A_j) + (\partial_j \mathbf{A}_k - \partial_k A_j) (\mathbf{p}_k - q \mathbf{A}_k) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Mit (15) können wir dafür

$$\mathbf{F}_j = \frac{q}{2} \left[ \mathbf{v}_k (\partial_j \mathbf{A}_k - \partial_k A_j) + (\partial_j \mathbf{A}_k - \partial_k A_j) \mathbf{v}_k \right] \quad (24)$$

schreiben. Wegen  $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$  bzw.  $\mathbf{B}_a = \epsilon_{abc} \partial_b \mathbf{A}_c$  folgt

$$\partial_j \mathbf{A}_k - \partial_k A_j = \epsilon_{jkl} \mathbf{B}_l \quad (25)$$

und damit

$$\mathbf{F}_j = \frac{q}{2} \epsilon_{jkl} (\mathbf{v}_k \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_l \mathbf{v}_k) = \frac{q}{2} \epsilon_{jkl} (\mathbf{v}_k \mathbf{B}_l - \mathbf{B}_k \mathbf{v}_l) = \frac{q}{2} (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{v}})_j, \quad (26)$$

und das war zu zeigen.