

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 Lösungen zu Blatt 10

Im Folgenden seien Σ und Σ' Inertialsysteme, wobei Σ' sich relativ zu Σ mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \beta c \vec{e}_1$ bewege.

Aufgabe 1: Geometrie im Minkowskiraum

In Σ' befinde sich ein ruhender Stab in der x'^1 - x'^2 -Ebene. Der Winkel zwischen dem Stab und der x'^1 -Achse sei α' . Welche Länge besitzt der Stab bzgl. Σ und welchen Winkel bildet er dort mit der x^1 -Achse?

Lösungsweg 1 (via euklidische Geometrie und Längenkontraktion): Es ist klar, dass sich der Stab auch bzgl. Σ stets in der x^1 - x^2 -Ebene befindet. Bzgl. Σ' kann man den Stab durch den Dreiervektor $\vec{S}' = L'(\cos \alpha', \sin \alpha', 0)$ beschreiben. Im Moment $t = 0$ bzgl. Σ misst ein Beobachter die x^1 -Komponente Lorentz-Kontrahiert, während die x^2 -Komponente ungeändert bleibt, d.h. der entsprechende Dreiervektor ist $\vec{S} = (L'/\gamma \cos \alpha', L' \sin \alpha')$.

Die Länge des Stabes ist bzgl. Σ also

$$L = L' \sqrt{\cos^2 \alpha' / \gamma^2 + \sin^2 \alpha'} = L' \sqrt{(1 - \beta^2) \cos^2 \alpha' + \sin^2 \alpha'} = L' \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \alpha'}, \quad (1)$$

und für den Winkel gilt

$$\cos \alpha = \frac{S^1}{L} = \frac{\cos \alpha' / \gamma}{\sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \alpha'}} = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2 \cos^2 \alpha'}} \cos \alpha'. \quad (2)$$

Es ist also $\cos \alpha \leq \cos \alpha'$, d.h. $\alpha \geq \alpha'$ (da $\cos \alpha$ monoton fallend ist für $\alpha \in [0, \pi]$).

Lösungsweg 2 (im Minkowskiraum mit Lorentz-Transformation): Die Weltlinien der Stabenden sind bzgl. des Systems Σ' , wo der Stab ruht

$$\underline{x}'(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}'(\lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ L' \cos \alpha' \\ L' \sin \alpha' \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Dieselben Weltlinien sind bzgl. Σ durch die (inverse) Lorentz-Transformation gegeben, d.h.

$$\underline{x}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \gamma \lambda_1 \\ \gamma \beta \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}(\lambda_2) = \begin{pmatrix} \gamma(\lambda_2 + \beta L' \cos \alpha') \\ \gamma(\beta \lambda_2 + L' \cos \alpha') \\ L' \sin \alpha' \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Der Beobachter liest die Koordinaten der Stabenden gleichzeitig (z.B. zur Zeit $t = 0$) ab. Die entsprechenden Weltlinienparameter ergeben sich aus

$$\begin{aligned} x^0(\lambda_1) = \gamma \lambda_1 \stackrel{!}{=} 0 &\Rightarrow \lambda_1 = 0, \\ y^0(\lambda_2) = \gamma(\lambda_2 + \beta L' \cos \alpha') \stackrel{!}{=} 0 &\Rightarrow \lambda_2 = -\beta L' \cos \alpha'. \end{aligned} \quad (5)$$

Die entsprechenden räumlichen Vektoren für die Stabenden sind also

$$\vec{x}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(\lambda_2) = \begin{pmatrix} \gamma L'(1-\beta^2) \cos \alpha' \\ L' \sin \alpha' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L' \cos \alpha' / \gamma \\ L' \sin \alpha' \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Es ist klar, dass dies genau dem in Lösungsweg 1 hergeleiteten Sachverhalt entspricht. Die weitere Diskussion ist also identisch wie bei Lösungsweg 1.

Aufgabe 2: Garagenparadoxon

Wir betrachten eine Garage der Ruhelänge L_g , die im System Σ ruhe. Ein Auto mit der Ruhelänge $L'_a = 2L_g$ bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \beta c \vec{e}_1$ (ruhe also bzgl. Σ'). Dabei sei β so gewählt, dass Seine Länge bzgl. Σ gerade $L_a = L'_a/2 = L_g$ sei.

- (a) Wie groß ist in dem Fall $\beta = |\vec{v}|/c$?

Lösung: Damit $L_a = L'_a/2 = L'_a/\gamma$ wird, muss offenbar $\gamma = 2$ oder $1 - \beta^2 = 1/4$ oder $\beta = \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2 \approx 0,866$ sein, d.h. Bob muss mit rund 87% der Lichtgeschwindigkeit relativ zu Alice rasen.

- (b) Die im System Σ ruhende Beobachterin Alice sieht, dass zur Zeit $t = 0$ das Auto genau in die Garage paßt. Dies ist möglich, weil für sie das Auto dieselbe Länge besitzt wie die Garage. Wie erscheint dem im Auto rasenden Bob diese Situation? Kann aus seiner Sicht das Auto auch in die Garage passen?

Lösung: Die Weltlinien der beiden Garagenenden bzgl. Alice sind durch

$$\underline{x}_g = \begin{pmatrix} x_g^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_g = \begin{pmatrix} y_g^0 \\ L_g \end{pmatrix} \quad (7)$$

und die Weltlinien der Enden des Autos bzgl. Bob

$$\underline{x}'_a = \begin{pmatrix} x_a'^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}'_a = \begin{pmatrix} y_a'^0 \\ 2L_g \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Dabei sind die jeweiligen Zeitkomponenten als Weltlinienparameter gewählt.

Die Weltlinien der Garagenenden bzgl. Bob sind demnach

$$\underline{x}'_g = \begin{pmatrix} \gamma x_g^0 \\ -\gamma \beta x_g^0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}'_g = \begin{pmatrix} \gamma(y_g^0 - \beta L_g) \\ \gamma(L_g - \beta y_g^0) \end{pmatrix} \quad (9)$$

und die der Autoenden bzgl. Alice

$$\underline{x}_a = \begin{pmatrix} \gamma x_a'^0 \\ \gamma \beta x_a'^0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_a = \begin{pmatrix} \gamma(y_a'^0 + 2\beta L_g) \\ \gamma(2L_g + \beta y_a'^0) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Betrachten wir zunächst die Situation aus Alices Sicht zur Zeit $x^0 = 0$. Dann müssen wir $x_g^0 = y_g^0 = 0$ setzen. Die Garagenenden sind also zu dieser Zeit bei $x_g^1 = 0$ und $y_g^1 = L_g$ (was trivial ist, da ja die Garage relativ zu Alice ruht). Für die Autoweltlinien ist $x_a'^0 = 0$ und $y_a'^0 = -2\beta L_g$ zu setzen. Demnach sind zur Zeit $t' = 0$ die Autoenden bei $x_a^1 = 0$ und $y_a^1 = 2L_g/\gamma = L_g$ (da ja

voraussetzungsgemäß $\gamma = 2$ ist). Damit befindet sich also zu Alices Sicht zur Zeit $t = 0$ das Auto in der Tat vollständig in der Garage.

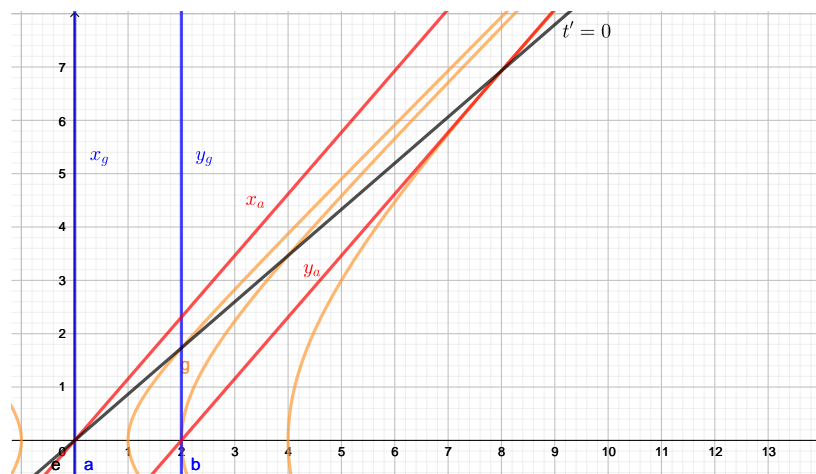
Betrachten wir nun die Situation zur Zeit $t' = 0$ aus Bobs Sicht. Gemäß (9) bedeutet dies $x_g'^0 = 0$ und $y_g'^0 = \beta L_g$, d.h. die Garagenenden sind bzgl. Bob bei $x_g'^1 = 0$ und $y_g'^1 = L'_g = L_g/\gamma = L_g/2$. Für Bob ist also die Garage sogar nur halb so groß wie für Alice (was wegen der Längenkontraktion zu erwarten war). Gemäß (8) befinden sich bei $ct' = x_a'^0 = y_a'^0 = 0$ die Autoenden bei $x_a'^1 = 0$ und $x_a'^1 = L'_a = 2L_g$. Das Auto befindet sich sicher nicht vollständig in der Garage sondern ist sogar viermal so lang wie die Garage.

- (c) Wie erklärt es sich, dass die scheinbar paradoxe Situation im Rahmen der Relativitätstheorie gar kein Paradox ist? Erläutern Sie Ihre Antwort anhand eines geeigneten Minkowski-Diagramms.

Lösung: Mathematisch ist klar, dass in der Minkowskischen Beschreibung der speziell relativistische Raumzeit nie echte Inkonsistenzen auftreten können, da die Beschreibung von physikalischen Vorgängen in verschiedenen Inertialsystemen durch die umkehrbar eindeutigen Lorentz-Transformationen gegeben sind. Aus mathematischer Sicht sind also all diese Beschreibungen äquivalent.

Im konkreten Beispiel löst sich der scheinbare Widerspruch zwischen Alices und Bobs Beschreibung der Situation, wie bei allen rein kinematischen Fragen, durch die Relativität der Gleichzeitigkeit für Ereignisse an verschiedenen Positionen im Konfigurationsraum der jeweiligen Beobachter auf.

Dies wird in dem Minkowski-Diagramm unten deutlich:



Die zeitartigen Weltlinien der Garagenenden sind in blau und die der Autoenden in rot eingezeichnet. Die Weltlinie x_a ist gleichzeitig Bobs Zeitachse ($x'^1 = 0$). Bobs Raumachse ($t' = 0$) ist die schwarze raumartige Weltlinie. Die drei orangenen Hyperbeln sind die Linien konstanter räumlicher Längen $L_g/2$, L_g und $2L_g$. Man liest aus dem Diagramm leicht den oben berechneten Sachverhalt ab: Während sich für Alice zur Zeit $t = 0$ das Auto gerade vollständig in der Garage befindet, besitzt für Bob die Garage nur die Länge $L'_g = L_g/\gamma = L_g/2$. Für ihn ist die Länge des Autos $L'_a = 2L_g$, d.h. es ist sogar viermal so lang wie die Garage. Entsprechend befindet sich für Bob zu seiner Zeit $t' = 0$ zwar das hintere Ende in der Garage, aber das vordere Ende ragt weit über das andere Garagenende hinaus, denn es ist ja viermal so lang. Sowohl für Alice als auch für Bob wird also derselbe Sachverhalt des durch die Garage rasenden Autos in sich konsistent beschrieben.

Die unterschiedliche Aussage, dass das Auto aus Sicht von Alice genau in die Garage passt, während dies für Bob ganz und gar nicht der Fall ist, ist nur ein scheinbarer Widerspruch und unserer anhand der Alltagserfahrung geprägten Intuition geschuldet, die der dafür näherungsweise gültige nichtrelativistische Beschreibung von Raum und Zeit a la Galilei und Newton entspricht. Tatsächlich muss jedoch der Sachverhalt der jeweiligen Sicht der beiden Beobachter Alice und Bob mittels der relativistischen Beschreibung von Raum und Zeit a la Einstein und Minkowski erfolgen, weil Bob immerhin mit fast 87% der Lichtgeschwindigkeit durch die Garage rast, was dem hier gewählten Lorentz-Faktor $\gamma = 2$ entspricht, d.h. die Effekte der Relativität der Gleichzeitigkeit und der damit einhergehenden Längenkontraktion bewegter Körper in Richtung der Relativgeschwindigkeit der beiden Bezugssysteme kann hier *nicht* vernachlässigt werden.

Hinweis: Das Geogebra-File zur Erstellung des Minkowski-Diagramms finden Sie auf der Vorlesungswebpage unter

<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo1-13-WS1819/garagen-paradox.ggb>

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo3-13-WS2324/index.html>