

Einsteins ungeliebtes Kind

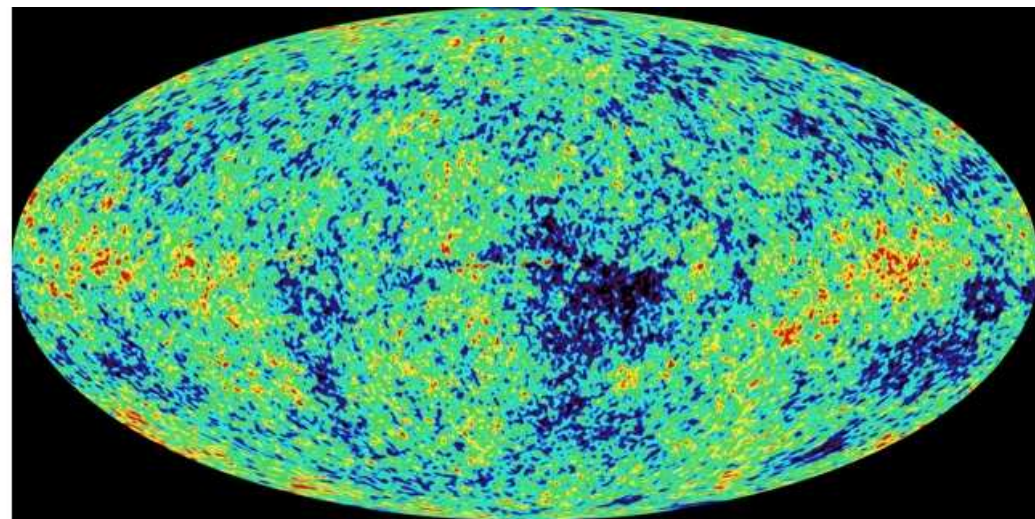
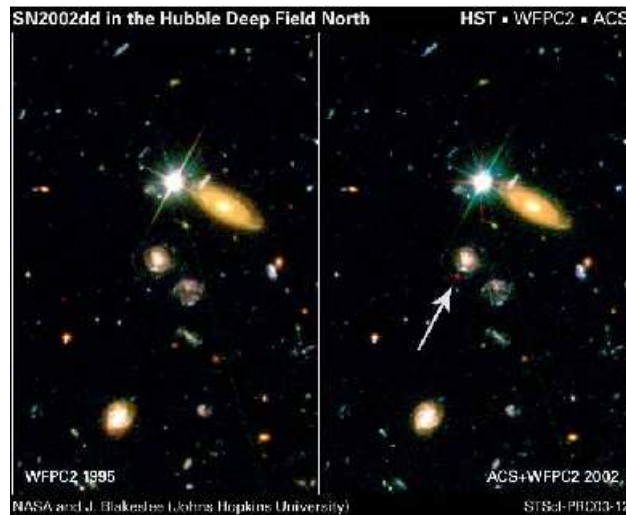
Die kosmologische Konstante

Hendrik van Hees

<http://theory.gsi.de/~vanhees/>

Fakultät für Physik

Universität Bielefeld



Inhalt

*As I was going up the stair,
I met a man who wasn't there.
He wasn't there again today,
I wish, I wish he'd stay away*

Hughes Mearns (Cited from [6]).

● Allgemeine Relativitätstheorie

- Einsteins Gravitationstheorie: „**Geometrodynamik**”
- Einstein-Hilbert-Wirkung und **Kosmologische Konstante**

● Kosmologie

- Kosmologisches Prinzip: **Raum ist homogen und isotrop, lokale Naturgesetze sind zeitlich unveränderlich**
- Horizontproblem und Inflation

● Daten (Auswahl)

- Supernovae und **Expansion des Universums**
- Kosmische Hintergrundstrahlung **WMAP Daten**

● Geschichte des Universums

Geometrie der Raumzeit I

- Allgemeine Relativitätstheorie: Relativistische Beschreibung der Gravitation Einstein (ca. 1907-1915)
- Phänomenologie: Gravitation beschleunigt alle Körper gleich
- Gravitation **lokal** äquivalent zu Bewegung in beschleunigtem Bezugssystem
- „Geometrodynamik“: **Raumzeit** = Vierdimensionale nichteuklidische Mannigfaltigkeit
- In kleinen Umgebungen um einen frei fallenden Punkt der Raumzeit existiert stets ein **inertiales Ruhesystem**, in dem die **Spezielle Relativitätstheorie** gilt
- Die Raumzeit besitzt „Metrik“ $g_{\mu\nu}(x)$: **Pseudoriemannsches Kontinuum**
- **Lokales Inertialsystem**: $g_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

Geometrie der Raumzeit II

- Dynamische Beschreibung der Gravitation?
- muß Erzeugung der Gravitation (= **Krümmung der Raumzeit**) aus der **Verteilung der Materie** und die Bewegung von „Testteilchen“ beschreiben
- Wichtigstes Prinzip zur Herleitung solcher Gleichungen **Wirkungsprinzip**
- Bewegungsgesetze müssen invariant unter beliebigen Koordinatentransformationen sein \Rightarrow Suche **Skalare Lagrangedichte**
- Aus Newtonscher Gravitation: Sollen 2. Ordnung in $g_{\mu\nu}$ sein
- \Rightarrow Suche skalare Lagrangedichte, die Funktion von $g_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu,\rho}$ ist
- Invariantentheorie: So etwas gibt es nicht, aber **Krümmungstensor**

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = (g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\mu}), \quad \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = g^{\rho\alpha}\Gamma_{\alpha\mu\nu},$$
$$R^\rho{}_{\mu\nu\sigma} = \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu,\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$$

liefert den **Ricci-Tensor** und **Krümmungsskalar**

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\nu\rho}, \quad R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$$

Einstein-Hilbert-Wirkung

- R enthält Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ bis zur **zweiten** Ordnung, diese aber nur linear
- Wirkungsprinzip ergibt dann Bewegungsgleichungen 2. Ordnung
- Krümmungsskalar R ist der **einzig**e Skalar der „Metrik“ mit diesen Eigenschaften; **außer einer Konstanten!** Allgemeinste Wirkung:

$$S[g, \text{matter fields}] = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_{\text{matter}} \quad \text{with } \kappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 1.865 \cdot 10^{-27} \frac{\text{cm}}{\text{g}}$$

- Variation ergibt **Einsteingleichungen** (Einstein, Hilbert 1915)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

- $T_{\mu\nu}$ **Belinfantes Energie-Impulstensor** des Beitrags der **Materie** zur Wirkung:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

- **Universelle Kopplung** κ entspricht **Äquivalenzprinzip**

Kosmologie

- **Kosmologisches Prinzip:** Für jeden Punkt der Raumzeit existiert ein Bezugssystem, so daß für einen Beobachter in diesem System der **Raum homogen und isotrop ist**. Die Metrik ist dadurch bis auf Koordinatentransformationen eindeutig bestimmt:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

- $k \in \{-1, 0, 1\}$, bedeutet einen hyperbolischen (offen, unendlich), flachen (offen, unendlich), sphärischen (geschlossen, ohne Rand) Raum
- Einsteingleichungen vereinfachen sich zu **Friedmanngleichungen**

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = \Lambda - \frac{\kappa}{2}(\rho_M + 3p_M), \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{\kappa}{3}\rho_M$$

Dabei sind ρ_M und p_M Dichte bzw. Druck der Materie (als ideales nichtrelativistisches Fluid und „Strahlung“ modelliert)

- **Zustandsgleichung:** Strahlung ($\hat{=}$ Gas masseloser Teilchen): $p_r = \rho_r/3$, „Staub:“ $p_m = 0$
- Kosmologische Konstante kann **positiv** sein: Dann führt sie zu einer **Abstoßung**, andernfalls zu einer Anziehung wie gewöhnliche Materie $\rho, p > 0$.

Horizontproblem

- Isotropie: Mittelung über Regionen der Raumzeit > 10 Mpc, $1 \text{ Mpc} = 3.1 \cdot 10^{22} \text{ m} = 3.3 \cdot 10^6 \text{ ly}$.
- Hintergrundstrahlung: $\delta T/T \approx 10^{-5}$
- Auf Skalen unter 10 Mpc werden „Anisotropien“ relevant, z.B. Materie in **Galaxien, Galaxienhaufen**
- Expansionsrate: Hubbleparameter $H = \dot{a}/a$, **heute**: $H_0 = 100h \text{ km}/(\text{s Mpc})$, WMAP-Daten: $h = 0.71 \pm 0.04$
- Maximale Entfernung, aus der uns Lichtsignal vom Urknall erreichen kann:

$$d_H(t_0) = a(t) \int_0^{t_0} dt' / a(t')$$

- Für strahlungsdominierten Kosmos: $a \propto t^{1/2}$, $d_H(t) = 2t$
- Für materiedominierten Kosmos: $a \propto t^{2/3}$, $d_H(t) = 3t$.
- In beiden Fällen: Für $t \rightarrow 0$ geht d_H schneller $\rightarrow 0$ als $a(t)$
- Kosmos größer als kausal zusammenhängende Gebiete
- **Horizontproblem**: Wie kann dann das Universum so homogen sein?

Inflationsmodell

- **Ausweg aus Horizontproblem:** Inflationäre Phase im frühen Universum
- exponentiell beschleunigte Expansion, z.B. durch **positive kosmologische Konstante:**

$$a(t) \propto \exp(H_{\Lambda} t), \quad (1)$$

- Dann kann das gesamte **heute** beobachtbare Universum kausal zusammenhängend gewesen sein, wenn die inflationäre Phase lange genug gedauert hat
- Übliche Modelle: Skalares **Inflatonfeld**, das sich anfangs langsam zeitlich ändert; „slow-roll inflation“
- Später ändert es sich schneller und heizt das Universum auf \Rightarrow **Produktion der gewöhnlichen Teilchen**
- dann stoppt Inflation zunächst, weil Evolution strahlungs- und materiedominiert wird
- kann aber zu späteren Zeiten wieder relevant werden und sich wieder langsamer zeitlich entwickeln \Rightarrow dann wieder effektive **kosmologische Konstante**
- je nach Modell kann das Verhalten zu späten Zeiten zu flacher Raumzeit oder zum „big crunch“ führen

Beispiel für Inflationäres Modell

- Einfachste Möglichkeit: Einzelnes skalares Feld

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]$$

$$\ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

- Falls $\dot{\phi}^2 \ll V$: \Rightarrow Wirkt wie kosmologische Konstante mit $p_\phi \approx -\rho_\phi$.

Modell kalter dunkler Materie

- Materiegehalt durch homogen verteilte **dunkle Materie** dominiert
- **Kalt**: Anfängliche Geschwindigkeitsverteilung relativ schmal, **kein thermisches Spektrum**
- **Parametrisierung**: Zustandsgleichung dunkler Materie $p_X = w_x \rho_X$ („kosmische Zustandsgleichung“)
- $w_X \approx \text{const} \Rightarrow \rho_X \propto a^{-3(1+w_X)}$
- Falls $w_X < -1/3$, dunkle Energie ergibt **positiven Beitrag** zu \ddot{a}/a
- $w_X = -1$ entspricht kosmologischer Konstante
- Kann ebenfalls mit Hilfe skalarer Modelle modelliert werden

Empirische Tests, Bestimmung von Modell-Parametern

- **Kosmologie:** Vergleiche **Kosmologische Modelle** mit **Beobachtungsdaten**
- **Annahme 1:** Universum im wesentlichen durch **Robertson-Walker-Raumzeit** beschrieben $\Leftrightarrow \exists$ Bezugssystem, bzgl. dessen der Raum homogen und isotrop ist
- **Annahme 2:** Die **lokalen** Naturgesetze sind immer und überall gleich, insbesondere die **Naturkonstanten** ($8\pi\gamma = \kappa$, $\alpha = e^2/(4\pi)$, \hbar , ...)
- Insbesondere auch Spektren der Atome **am Ausstrahlungsort** stets die gleichen wie hier und jetzt im Labor gemessen!
- Üblicherweise werden die Parameter in den Friedmanngleichungen umgeschrieben mit $H = \dot{a}/a$, $\rho = \rho/\rho_c$ mit $\rho_c = 3H^2/\kappa$ (kritische Dichte), $q_0 = -a\ddot{a}/\dot{a}^2$, $\chi = 3p/\rho_c$:

$$k/a^2 - \Lambda = H^2(2q_0 - 1 - \chi), \quad k/a^2 = H^2(\Omega_{\text{tot}} - 1), \quad \Omega_{\text{tot}} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$$

Ausdehnung des Universums

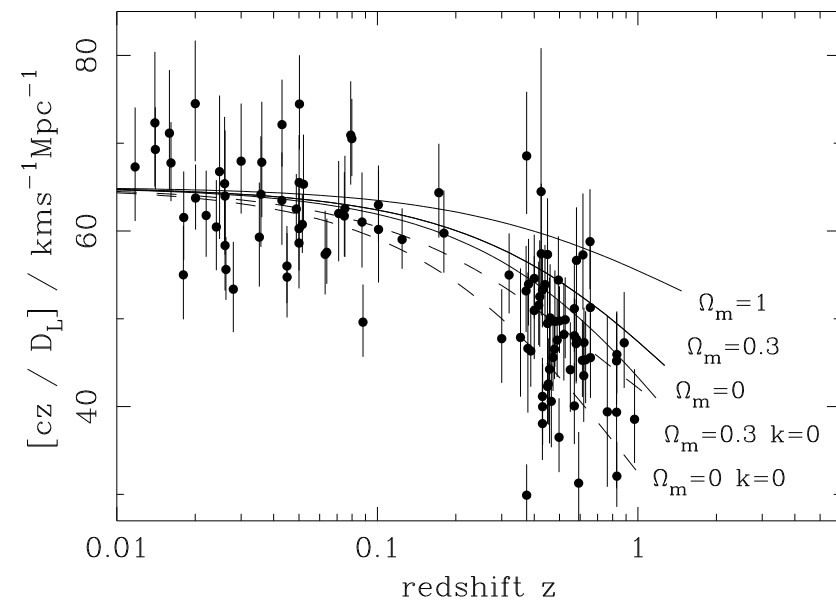
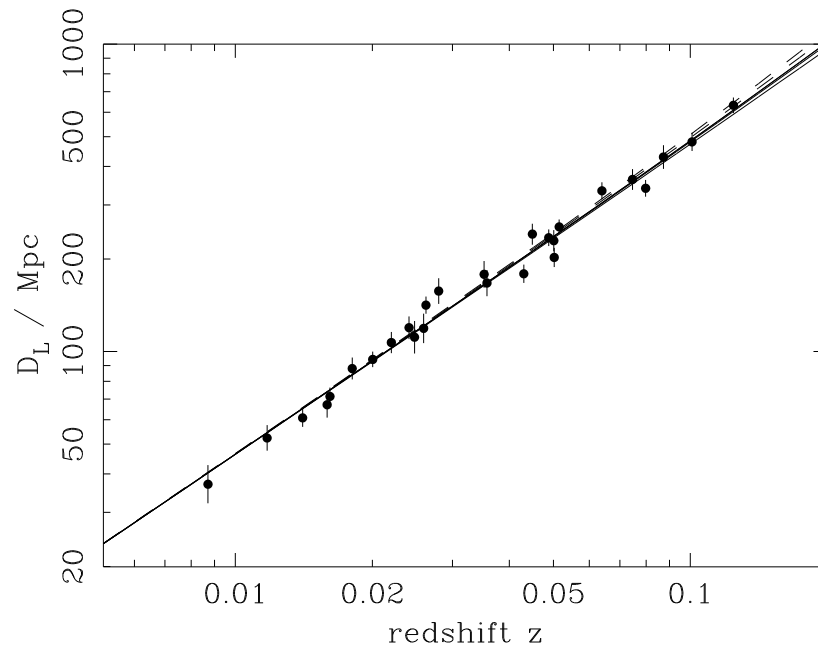
- Rotverschiebung:

$$1 + z = \lambda_{\text{obs}} / \lambda_{\text{em}} = a(t_{\text{obs}}) / a(t_{\text{em}})$$

- Punktlichtquelle strahlt mit **absoluter Helligkeit** L ab

$$L = L_{\text{obs}} 4\pi D_L^2 \text{ mit } D_L = (1 + z)a(t)r$$

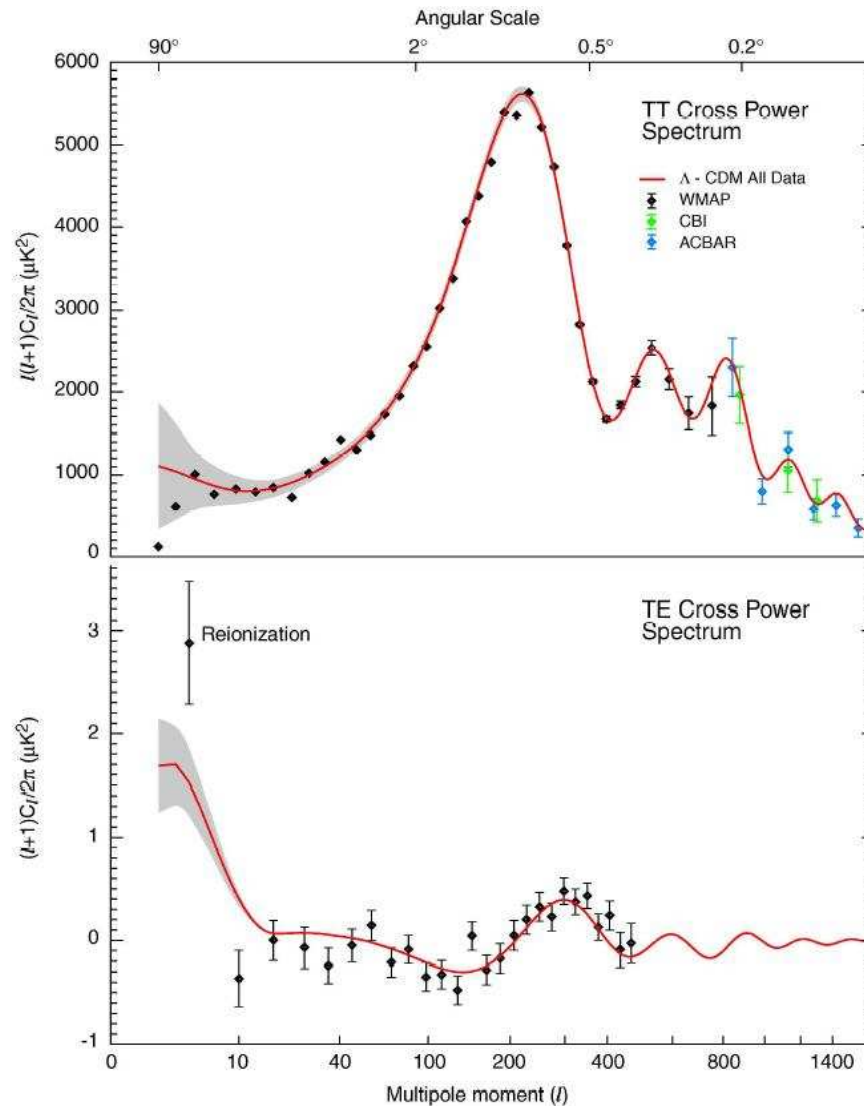
- Beobachtung erfordert Kenntnis von Helligkeit L und Helligkeitsabstand D_L .
Beobachtet werden **Typ 1a Supernovae**



Kosmische Hintergrundstrahlung

- Universum ist aus **heißem, dichtem Anfangszustand** („Urknall“) hervorgegangen
- Standardmodell der Elementarteilchen: Materie = **geladene Teilchen** vor
- Dabei viele Photonen entstanden, die ins **thermischen Gleichgewicht** (durch Wechselwirkung mit geladenen Teilchen)
- Heute: Universum abgekühlt und Materie in **elektrisch neutralen Atomen**
- Daher Universum heute durchsichtig
- Die thermischen Photonen sind rotverschoben durch Ausdehnung des Universums
- Daher heute: **Planck-Spektrum** mit Temperatur von (2.725 ± 0.002) K (WMAP-Wert)
- Richtungsabhängige Temperaturschwankungen: $\delta T/T \approx 10^{-5}$.
- Annahme über Ursache der Schwankungen: Dichteschwankungen der Materie zur Zeit der Entkopplung der Strahlung t_{dec}

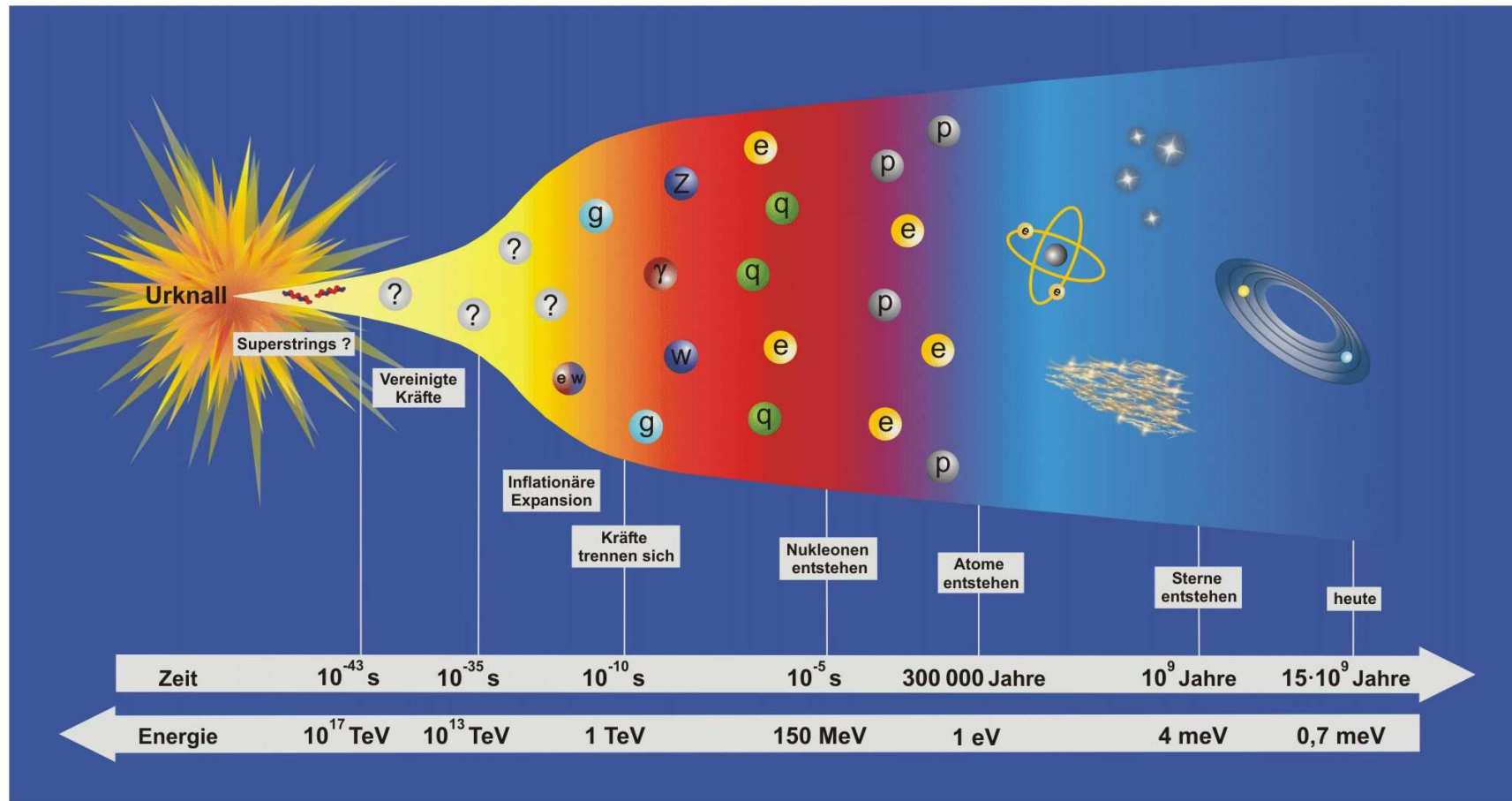
Temperaturschwankungen der Hintergrundstrahlung



- Best Fit: Modell mit kalter dunkler Materie und **Kosmologischer Konstante**
- Parameter: $\Omega_{\text{tot}} = 1.02 \pm 0.02$,
 $w < -0.78$, $\Omega_{\Lambda} = 0.78 \pm 0.04$,
 $\Omega_b = 0.044 \pm 0.004$,
 $\Omega_m = 0.27 \pm 0.04$,
 $h = 0.71 + 0.04 - 0.03$,
 $t_0 = 13.7 \text{ Gyr}$
- Konsistent mit dem Standardmodell der Synthese der leichten „primordialen“ Elemente H, He, Li

Geschichte des Universums

- Zusammen mit **Standardmodell der Elementarteilchen** ergibt sich bislang folgendes Bild von der Entwicklung des Universums



Verwendete Literatur

Literatur

- [1] C. L. Bennet et al. First year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Preliminary maps and basic results. *Astrophys. J. Suppl.*, 148:1, 2003.
- [2] Hubert Gönner. *Einführung in die Kosmologie*. Spektrum Akademischer Verlag, 1994.
- [3] Andrew R. Liddle and David H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [4] P. J. E. Peebles and Bharat Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, 75:559–606, 2003.
- [5] Roman U. Sexl and Helmuth K. Urbantke. *Gravitation und Kosmologie*. Spektrum Akademischer Verlag, 1995.
- [6] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1, 1989.