Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2009**

Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 1 **20.04.2009, Abgabetermin für Hausübungen: 27.04.2009**

Präsenzaufgabe 1 (Gaußsches Wellenpaket I)

Für ein Teilchen der Masse m sei die Aufenthaltswahrscheinlichkeit durch

$$P(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2 = \frac{1}{[\pi b^2(t)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\vec{x} - \vec{v}_0 t)^2}{b^2(t)}\right] \tag{1}$$

gegeben, wobei

$$b(t) = b_0 \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 b_0^4}} \tag{2}$$

ist.

(a) Zeigen Sie, daß $P(\vec{x}, t)$ zu jedem Zeitpunkt t korrekt auf 1 normiert ist.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Ortes des Teilchens als Funktion der Zeit.

Präsenzaufgabe 2 (Komplexes „Fehlerintegral“)

Im folgenden diskutieren wir das Integral

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \exp\left(-az^2 + bz\right) \tag{3}$$

für komplexe Konstanten a und b.

(a) Welche Bedingungen müssen für $a, b \in \mathbb{C}$ gelten, damit das Integral existiert?

(b) Überführen Sie durch eine geeignete Substitution das Integral auf

$$I(a, b) = f(a, b) \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}y \exp\left(-y^2\right), \tag{4}$$

wobei $\mathcal{C}$ einen bestimmten Integrationsweg in der komplexen y-Ebene bezeichnet.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes, daß das verbleibende Integral durch das rein reelle „Fehlerintegral”

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \exp(-y^2) = \sqrt{\pi} \tag{5}$$

gegeben ist.

(d) Berechnen Sie auf möglichst einfache Weise die Integrale

$$J_n(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, z^n \exp\left(-az^2 + bz\right) \tag{6}$$

für $n = 1, 2, 3$.

Beachten Sie die Hausübungen auf der nächsten Seite!

Hausübung 1 (Gaußsches Wellenpaket II)

Die Wellenfunktion für ein freies Teilchen der Masse m, das sich entlang der x-Achse bewegt, sei durch

$$\psi(x,t) = \frac{N}{\sqrt{1+4\mathrm{i}\alpha\beta t}} \exp\left[-\frac{\alpha x^2 - \mathrm{i}k_0 x + \mathrm{i}\beta k_0^2 t}{1+4\mathrm{i}\alpha\beta t}\right] \text{ mit } \beta = \frac{\hbar}{2m}, \quad \alpha > 0, \quad k_0 \in \mathbb{R} \tag{7}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante $N > 0$ so, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilung $P(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ zu allen Zeiten t korrekt normiert ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x P(x,t) = 1. \tag{8}$$

(b) An welcher Stelle x_{max} hält sich das Teilchen am wahrscheinlichsten auf? Welche Interpretation ergibt sich für den Parameter k_0?

(c) Berechnen Sie Ortserwartungswert und -varianz

$$\langle x\rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x P(t,x), \quad \Delta x^2(t) = \left\langle x^2 \right\rangle(t) - \langle x\rangle^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^2 P(t,x) - \langle x\rangle^2(t). \tag{9}$$

(d) Wie verhält sich die „Breite“ Δx der Ortsverteilung mit der Zeit?

(e) Skizzieren Sie $P(t,x)$ für

- $k_0 = 0$, $t = 0$ und $t > 0$,
- $k_0 > 0$, $t = 0$ und $t > 0$.