Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2009**

Übungen zur Quantenmechanik I

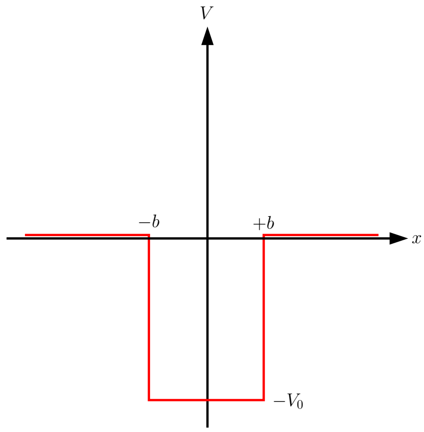
Blatt 4 **11.05.2009, Abgabetermin für Hausübungen: 18.05.2009**

Präsenzaufgabe 7 (Endlich tiefer Potentialtopf)

Betrachten Sie Teilchen in dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |x| < b \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{1}$$

wobei $b > 0$. In dieser Aufgabe soll das Energieeigenwertproblem diskutiert werden.



(a) Finden Sie dazu zunächst die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung, die sich auf 1 normieren lassen (gebundene Energieeigenzustände):

$$\psi''(x) = [U(x) - \epsilon]\psi(x), \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{2m}{\hbar^2}E, \quad U(x) = \frac{2m}{\hbar^2}V(x). \tag{2}$$

Beachten Sie dazu, daß die Wellenfunktionen und ihre Ableitungen bei $x = \pm b$ stetig sein müssen und daß das Normierungsintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x |\psi(x)|^2 \stackrel{!}{=} 1 \tag{3}$$

existieren muß. Zeigen Sie, daß es wenigstens einen gebundenen Zustand gibt, und zu jedem dazugehörigen Energieeigenwert genau eine Eigenfunktion gibt, d.h. daß die Energieeigenwerte zu gebundenen Zuständen nicht entartet sind.

Hinweise: Beachten Sie zur Vereinfachung der Lösung, daß das Potential symmetrisch unter Raumspiegelungstransformationen $x \to -x$ ist. Diskutieren Sie die Existenz (und Anzahl!) von gebundenen Zuständen graphisch!

(b) Finden Sie die übrigen kontinuierlichen Energieeigenwerte und die dazugehörigen „Eigenfunktionen" („Streuzustände"). Zeigen Sie, daß zu jedem kontinuierlichen Energieeigenwert zwei linear unabhängige Eigenzustände existieren, d.h. daß diese Energieeigenwerte doppelt entartet sind.

Bemerkung: Die Streuzustände zu kontinuierlichen Energieeigenwerten können nicht mehr auf 1 normiert werden, erfüllen aber die verallgemeinerte „Orthonormierungsbedingung"

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi_E^*(x)\psi_{E'}(x) = \delta(E - E'). \tag{4}$$

Hausübung 5 (Unendlich tiefer Potentialtopf (Fortsetzung))

Betrachten Sie wieder den unendlich tiefen Potentialtopf aus P6. Das Teilchen befinde sich im 1. angeregten Energieeigenzustand

$$E = E_2 = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2, \quad \psi_1(x) = \frac{\Theta(b-|x|)}{\sqrt{b}} \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right). \tag{5}$$

Zur Zeit $t = 0$ werden nun die Wände des Topfes sprungartig auseinanderbewegt, so daß sich die Breite des Topfes verdoppelt. Dabei soll der Zustand des Teilchens direkt nach der Änderung gleich bleiben. Wir bezeichnen die stationären Lösungen des doppelt breiten Topfes bei $t > 0$ im folgenden mit $\tilde{E}_n$ und $\tilde{\psi}_n$.

(a) Entwickeln Sie den Anfangszustand $\Psi(x, t = 0) = \psi_1(x)$ nach Energieeigenzuständen $\tilde{\psi}_n$:

$$\Psi(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tilde{\psi}_n(x). \tag{6}$$

Hinweise: Verwenden Sie zur Berechnung der Koeffizienten c_n die Orthonormiertheit der Wellenfunktionen $\tilde{\psi}_n$! Besondere Vorsicht ist für $n = 4$ angebracht!

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_n, das Teilchen in einem beliebigen Eigenzustand des geänderten Systems zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in einem Zustand gerader Parität zu finden?

(c) Geben Sie den Erwartungswert für die Energie als Funktion der Zeit t an.

Hinweis: Verwenden Sie die Resultate aus P6c). Sie dürfen ohne Beweis die Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{[(2n-1)^2 - 4]^2} = \frac{\pi^2}{16} \tag{7}$$

benutzen.

Hausübung 6 (Attraktives δ-Potential)

Gegeben sei das δ-Potential $V(x) = -V_0\delta(x)$ mit $V_0 > 0$.

(a) Wie lauten die Bedingungen an die Wellenfunktion an der Singularität $x = 0$ des Integrals? Integrieren Sie dazu die zeitunabhängige Schrödingergleichung über ein kleines Intervall $x \in (-\epsilon, \epsilon)$.

(b) Finden Sie die gebundenen Zustände (Wellenfunktionen) und die zugehörigen Energieeigenwerte.

(c) Finden Sie die Streuzustände (d.h. Energieeigenzustände für die kontinuierlichen Energieeigenwerte).
