

## Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 9

22.06.2009, Abgabetermin für Hausübungen: 29.06.2009

**Präsenzaufgabe 12 (Kohärente Zustände)**

Wir betrachten wieder den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}. \quad (1)$$

Zur Zeit  $t = 0$  sei das Teilchen in dem folgenden Zustand präpariert:

$$\Psi_{0,\beta}(x) = \exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} u_n(x), \quad (2)$$

wobei die  $u_n$  die Energieeigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind (s. voriges Übungsblatt);  $\beta$  ist ein beliebiger *komplexer* Parameter. Solche Zustände nennt man kohärente Zustände.

- (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit  $W_n$ , bei der Messung der Energie den Energieeigenwert  $E_n$  zu finden? Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung korrekt auf 1 normiert? Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie.

**Hinweis:** Berechnen Sie zunächst die erzeugende Funktion der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n z^n. \quad (3)$$

- (b) Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Zustandes, also  $\Psi(x, t)$ , für den gegebenen Anfangszustand.
- (c) Berechnen Sie die Erwartungswerte für Ort und Impuls sowie deren Standardabweichungen als Funktionen der Zeit.
- (d) In welcher Relation stehen die Erwartungswerte für Ort und Impuls zur klassischen Bewegung des Teilchens im harmonischen Oszillatorpotential?
- (e) Prüfen Sie die Heisenbergsche Orts-Impuls-Unschärferelation. Vergleichen Sie das Verhalten dieses Zustandes mit dem Gaußschen Wellenpaket eines freien Teilchens.

**Hausübung 12 (Dipolmoment des Wasserstoffatoms)**

In der Vorlesung haben Sie die Energieeigenfunktionen des Wasserstoffatoms

$$\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (4)$$

mit den Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}$  und den Radialwellenfunktionen  $R_{nl}$  kennengelernt. Die dazugehörigen Energieniveaus sind

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{e^2}{2a} \frac{1}{n^2} \quad \text{mit} \quad a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}, \quad (5)$$

Für jedes  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$  kann  $l \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$  sein und zu jedem  $l$  liegt  $m \in \{-l, -l+1, \dots, l\}$ . Zu jedem Energieniveau  $n$  gehören daher  $n^2$  Eigenfunktionen ( $n^2$ -fache Entartung);  $e$  ist die Ladung eines Elektrons,  $\mu = m_e m_p / (m_e + m_p)$  die reduzierte Masse des Elektron-Protonensystems, und  $a$  ist der Bohrsche Radius.

Der Grundzustand ist durch

$$\psi_{100}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{a^3}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) Y_{00}(\vartheta, \varphi) \quad (6)$$

gegeben.

Die vier Zustände zum ersten angeregten Niveau ( $n = 2$ ) lauten

$$\begin{aligned} u_1(r, \vartheta, \varphi) &= \psi_{200}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{2a^3}} \left(2 - \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a}\right) Y_{00}(\vartheta, \varphi), \\ u_2(r, \vartheta, \varphi) &= \psi_{210}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{6a^3}} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right) Y_{10}(\vartheta, \varphi), \\ u_{3,4}(r, \vartheta, \varphi) &= \psi_{21,\pm 1}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{3a^3}} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right) Y_{1,\pm 1}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

Alle diese Wellenfunktionen sind auf 1 normiert.

Der Operator für die  $z$ -Komponente des (permanenten) elektrischen Dipolmoments des Wasserstoffatoms ist

$$\hat{P}_z = -e\hat{z}. \quad (8)$$

- (a) Berechnen Sie  $P_z$  für den Grundzustand des Wasserstoffatoms.  
 (b) Die allgemeine Wellenfunktion für ein Wasserstoffatom im ersten angeregten Zustand ist eine beliebige Superposition der vier Wellenfunktionen (7):

$$\Psi_2 = \sum_{k=1}^4 c_k u_k \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1}^4 |c_k|^2 = 1. \quad (9)$$

Drücken Sie den Erwartungswert des elektrischen Dipolmoments mit Hilfe der Matrixelemente

$$W_{k_1 k_2} = -e \int_{\mathbb{R}^3} d^3x u_{k_1}^*(r, \vartheta, \varphi) z u_{k_2}(r, \vartheta, \varphi) \quad (10)$$

aus.

- (c) Zeigen Sie, daß die einzigen nichtverschwindenden Matrixelemente  $W_{12}$  und  $W_{21} = W_{12}^*$  sind.  
**Hinweis:** Sie können diese Teilaufgabe (fast) ohne Rechnung lösen, wenn Sie über die Parität der Funktionen  $u_k$  nachdenken und die Kommutatorrelation  $[\hat{z}, \hat{L}_z]$  verwenden.  
 (d) Berechnen Sie dieses Matrixelement konkret. Was ist dann  $\langle P_z \rangle$  für die allgemeine Wellenfunktion (9)?

**Hinweis:** Nützliche Integrale:

$$\int_0^\infty dx r^n \exp(-Ar) = \frac{n!}{A^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}, A > 0. \quad (11)$$

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

<http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/qm1-ss09/>