**Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees** **Sommersemester 2009**

# Übungen zur Quantenmechanik I

**Blatt 10** **29.06.2009, Abgabetermin für Hausübungen: 06.07.2009**

---

### Präsenzaufgabe 13 (Schwarzsche Ungleichung etc.)

Es seien $|a\rangle$ und $|b\rangle$ beliebige Zustandsvektoren mit Skalarprodukt $\langle a \,|\, b\rangle$. Die Norm eines Vektors ist durch

$$\|a\| = \sqrt{\langle a \,|\, a\rangle} \tag{1}$$

definiert.

(a) Beweisen Sie die **Parallelogrammgleichung**

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2. \tag{2}$$

(b) Beweisen Sie die Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle a \,|\, b\rangle| \leq \|a\|\|b\|. \tag{3}$$

**Hinweis:** Zerlegen Sie $|b\rangle$ nach Komponenten senkrecht und parallel zu $|a\rangle$.

(c) Wann gilt in (3) das Gleichheitszeichen?

### Präsenzaufgabe 14 (Operatoren)

Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ lineare Operatoren, die auf Zustandsvektoren wirken. Der zu $\mathbf{A}$ adjungierte Operator $\mathbf{A}^\dagger$ ist dadurch definiert, daß für alle $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle a \,|\, \mathbf{A}b\rangle = \left\langle \mathbf{A}^\dagger a \,\middle|\, b \right\rangle \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{A}a \,|\, b\rangle = \left\langle a \,\middle|\, \mathbf{A}^\dagger b \right\rangle. \tag{4}$$

Ein Operator heißt **hermitesch (oder selbstadjungiert)**, wenn $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$. Der zu $\mathbf{A}$ **inverse** Operator $\mathbf{A}^{-1}$ erfüllt $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbb{1}$. Ein Operator heißt **unitär**, wenn $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\dagger$.

(a) Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ beliebige Operatoren und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Wie lautet dann der zu

$$\mathbf{C} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} \tag{5}$$

adjungierte Operator?

(b) Seien $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$. Wie lautet der zu

$$\mathbf{A} = |\psi\rangle\langle\phi| \tag{6}$$

adjungierte Operator?

(c) Es sei $|u_n\rangle$ für $n \in \mathbb{N}$ ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS), d.h. es gilt

$$\langle u_k \,|\, u_l\rangle = \delta_{kl} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |u_k\rangle\langle u_k| = \mathbb{1}. \tag{7}$$

Zeigen Sie, daß die Matrixelemente $A_{kl} = \langle u_k \,|\, \mathbf{A}u_l\rangle$ eines hermiteschen Operators $\mathbf{A}$ die Bedingung

$$A_{kl} = A_{lk}^* \tag{8}$$

erfüllen.

(d) Sei $|v\rangle_n$ für $n \in \mathbb{N}$ ein weiteres VONS. Bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten $U_{jk}$ in

$$|u_k\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} |v_j\rangle \, U_{jk}. \tag{9}$$

(e) Zeigen Sie, daß umgekehrt

$$|v_j\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} U_{jk}^{*} \, |u_k\rangle \tag{10}$$

(f) Drücken Sie die Matrixelemente $A'_{jk} = \langle v_j \,|\, \mathbf{A} v_k \rangle$ mit Hilfe der Matrixelemente $A_{jk} = \langle u_j \,|\, \mathbf{A} u_k \rangle$ und den $U_{jk}$ aus.

---

**Hausübung 12 (Orts- und Impulsdarstellung)**

Wir betrachten ein Teilchen, das sich entlang der $x$-Achse bewegt. Orts- und Impulsoperator sind hermitesch und erfüllen die Kommutatorrelation

$$[\mathbf{x}, \mathbf{p}] := \mathbf{x}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{x} = \mathrm{i}\hbar \mathbb{1}. \tag{11}$$

Es seien weiter $|u_x\rangle$ und $|v_p\rangle$ die Orts- und Impulseigenzustände, die wie folgt „normiert” seien

$$\langle u_{x_1} \,|\, u_{x_2} \rangle = \delta(x_1 - x_2), \quad \langle v_{p_1} \,|\, v_{p_2} \rangle = \delta(p_1 - p_2). \tag{12}$$

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$[\mathbf{x}, \mathbf{p}^n] = \mathrm{i}\hbar n \mathbf{p}^{n-1}. \tag{13}$$

**Hinweis:** Sie können die für beliebige Operatoren $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ gültige Relation

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{C}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\, \mathbf{C} + \mathbf{B}\, [\mathbf{A}, \mathbf{C}] \tag{14}$$

verwenden, die man sofort durch Ausschreiben der Kommutatoren auf beiden Seiten der Gleichungen beweist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (13), daß für den Operator

$$\mathbf{T}(x) = \exp(-\mathrm{i}x\mathbf{p}/\hbar) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}x\mathbf{p}/\hbar)^k}{k!} \tag{15}$$

die Kommutatorrelation

$$[\mathbf{x}, \mathbf{T}(x)] = x\mathbf{T}(x) \tag{16}$$

gilt.

(c) Zeigen Sie, daß

$$\mathbf{T}(x)\, |u_0\rangle = |u_x\rangle \tag{17}$$

gilt, indem Sie mit Hilfe von (16) $\mathbf{x}\mathbf{T}(x)\, |u_x\rangle$ berechnen.

(d) Berechnen Sie unter Verwendung von (17)

$$v_p(x) = \langle u_x \,|\, v_p \rangle = \langle \mathbf{T}(x) u_0 \,|\, v_p \rangle\,. \tag{18}$$

**Hinweis:** Bestimmen Sie aus (15) zunächst $\mathbf{T}(x)^\dagger$ und dann $\mathbf{T}(x)^\dagger\, |v_p\rangle$.

(e) Bestimmen Sie aus den Bedingungen (12) die Konstante $v_p(x = 0)$.

---

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

`http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/qm1-ss09/`