Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 1

$\boxed{P}$ a) Substitution:

$$\vec{y} = \frac{\vec{x} - \vec{v}_0 t}{b(t)} \Rightarrow \vec{x} = b(t)\,\vec{y} + \vec{v}_0 t$$

$$d^3\vec{x} = d^3\vec{y} \det \frac{\partial(\vec{x})}{\partial(\vec{y})} = d^3\vec{y} \det \begin{pmatrix} b(t) & 0 & 0 \\ 0 & b(t) & 0 \\ 0 & 0 & b(t) \end{pmatrix}$$

$$= d^3\vec{y}\, b^3(t)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\, P(\vec{x},t) = \frac{1}{\pi^{3/2} b^3(t)} b^3(t) \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{y} \exp(-\vec{y}^2)$$

$$= \frac{1}{\pi^{3/2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \exp(-y_1^2) \right]^3$$

Das Integral berechnet man mit folgendem Trick

$$I^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \exp(-y_1^2) \right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \exp(-y_1^2) \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \exp(-y_2^2)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{y} \exp(-\vec{y}^2)$$

Substituiere Polarkoordinaten

$$y_1 = r\cos\varphi \;;\; y_2 = r\sin\varphi \;;\; r > 0 \;;\; \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$J = \det \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(r, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

②

$$J = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

$$\Rightarrow I^2 = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \; r \exp(-r^2)$$

$$= 2\pi \int_0^\infty dr \; r \exp(-r^2)$$

$$= -\pi \exp(-r^2)\Big|_0^\infty = \pi$$

Da $I > 0$, muß also $I = \sqrt{\pi}$ sein

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \; P(\vec{x}, t) = 1 \quad \text{qed.}$$

(b) $$\langle \vec{x} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \; \vec{x} \; P(\vec{x}, t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{y} \; \frac{1}{\pi^{3/2}} \left[b(t)\, \vec{y} + \vec{v}_0 t \right] \exp(-\vec{y}^2)$$

Das Integral über den ersten Term verschwindet, da es antisymmetrisch in $\vec{y} \to -\vec{y}$ ist. Der zweite Term ist durch das Normierungsintegral bereits bestimmt:

$$\langle \vec{x} \rangle = \vec{v}_0 t$$

P2 (a) Es muß $\mathrm{Re}\, a > 0$ sein, damit das Integral konvergiert, während $b \in \mathbb{C}$ sein darf.

(b)
$$-az^2 + bz = -a\left(z^2 - \frac{b}{a}z\right)$$
$$= -a\left[\left(z - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

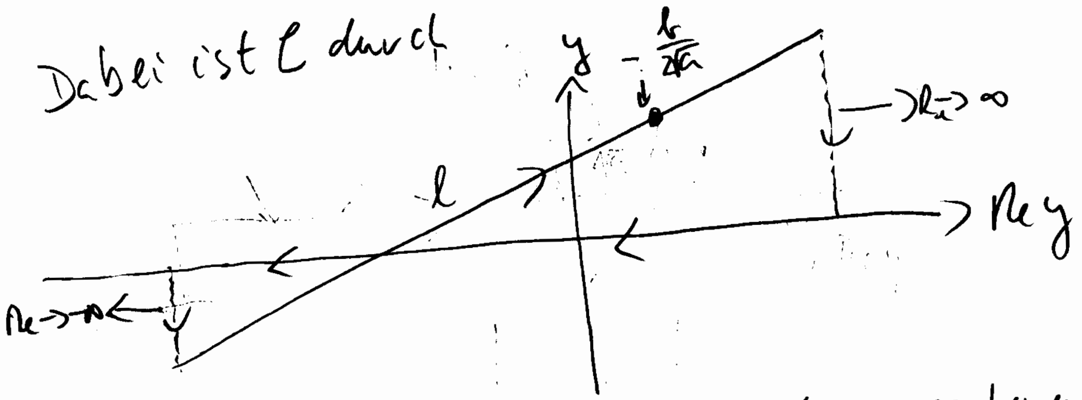
$$\Rightarrow I(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left[-a\left(z - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a}\right]$$

$$= \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left[-a\left(z - \frac{b}{2a}\right)^2\right]$$

$$y = \sqrt{a}\left(z - \frac{b}{2a}\right) \Rightarrow z = \frac{y}{\sqrt{a}} + \frac{b}{2a} \Rightarrow dz = \frac{y}{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow I(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \int_{\ell} dy \exp(-y^2)$$

(c) Dabei ist ℓ durch



gegeben. Wir ergänzen den Weg ℓ in der angegebenen Weise. Da $f(y) = \exp(-y^2)$ überall analytisch ist, ist das Integral entlang jeder geschlossenen Kurve 0 (Residuensatz). Die Vertikalen Teile tragen im Unendlichen nichts zum Integral bei, so daß also gilt

$$\int_{\ell} dy \exp(-y^2) - \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-y^2) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} dy\, \exp(-y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \exp(-y^2) = \sqrt{\pi},$$

wie wir in Aufgabe P1 nachgerechnet haben.

$$\Rightarrow \quad I(a,b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$

(d) $$J_n(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, z^n \exp(-az^2 + bz)$$

$$= \frac{d^n}{db^n} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \exp(-az^2 + bz) = \frac{\partial^n}{\partial b^n} I(a,b)$$

$$J_1 = \frac{\partial}{\partial b} I(a,b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}\, b \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$J_2 = \frac{\partial J_1}{\partial b} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \left(1 + \frac{b^2}{2a}\right) \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$J_3 = \frac{\partial J_2}{\partial b} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \left[\frac{b}{a} + \left(1 + \frac{b^2}{2a}\right)\frac{b}{2a}\right] \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \left[\frac{3b}{2a} + \frac{b^3}{4a^2}\right] \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad J_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}} \left(6 + \frac{b^2}{a}\right) b \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$