H2 $\boxed{\text{10 Punkte}}$

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |\tilde{\psi}_0(k)|^2 \overset{!}{=} 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |N|^2 \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{2\alpha}\right] \overset{!}{=} 1$$

$$\overset{P2}{\Rightarrow} |N|^2 \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \boxed{N = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{1/4}}$$

1

(b) $\langle k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} k |\tilde{\psi}(k,t)|^2$

$$\underset{=}{\overset{P5}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} k |\tilde{\psi}_0(k)|^2$$

1

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} k \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{2\alpha}\right]$$

Subst.: $k' = k - k_0$

$$\langle k \rangle = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} (k'+k_0) \exp\left(-\frac{k'^2}{2\alpha}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} k' \exp\left(-\frac{k'^2}{2\alpha}\right)}_{0\text{, da Integrand ungerade}} + k_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} \exp\left(-\frac{k'^2}{2\alpha}\right)}_{\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\text{ wegen P2}} \right\}$$

1

$$= k_0 \Rightarrow \boxed{\langle k \rangle = k_0}$$

$$\Delta k^2 = \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle = \langle (k-k_0)^2 \rangle$$

$$\Delta k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (k-k_0)^2 \, |\tilde{\varphi}_0(k)|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} k'^2 \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{k'^2}{2\alpha}\right)$$

$$\overset{PZ}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\alpha)^{3/2} = \alpha \qquad \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta k^2 = \alpha}$$

(ii) $$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\varphi}(k,t) \exp(ikx)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} N \exp\left(-\frac{(k-k_0)^2}{4\alpha} - \frac{i\hbar k^2 t}{2m} + ikx\right)$$

$$= N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp\left[-k^2\left(\frac{1}{4\alpha} + \frac{i\hbar t}{2m}\right) + k\left(\frac{k_0}{2\alpha} + ix\right) - \frac{k_0^2}{4\alpha}\right]$$

$$= N \exp\left(-\frac{k_0^2}{4\alpha}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp\left[-k^2\left(\frac{1}{4\alpha} + \frac{i\hbar t}{2m}\right) + k\left(\frac{k_0}{2\alpha} + ix\right)\right]$$

$$\overset{P2}{=} \frac{N}{2\pi} \exp\left(-\frac{k_0^2}{4\alpha}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{4\alpha} + \frac{i\hbar t}{2m}}} \exp\left[\frac{\left(ix + \frac{k_0}{2\alpha}\right)^2}{4\left(\frac{1}{4\alpha} + \frac{i\hbar t}{2m}\right)}\right]$$

$$\boxed{\text{mit } \beta = \frac{\hbar}{2m}}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\alpha}\right)^{1/4} \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{1+4i\alpha\beta t}} \exp\left[-\alpha \frac{\left(x - \frac{ik_0}{2\alpha}\right)^2}{1+4i\alpha\beta t} - \frac{k_0^2}{4\alpha}\right] \qquad \boxed{2}$$

$$\alpha\left(x - \frac{ik_0}{2\alpha}\right)^2 \frac{1}{1+4i\alpha\beta t} + \frac{k_0^2}{4\alpha} =$$

$$= \frac{1}{1+4i\alpha\beta t}\left[\alpha\left(x - \frac{ik_0}{2\alpha}\right)^2 + (1+4i\alpha\beta t)\frac{k_0^2}{4\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{1+4i\alpha\beta t}\left[\alpha x^2 - ik_0 x - \cancel{\frac{k_0^2}{4\alpha}} + (\cancel{1}+4i\alpha\beta t)\frac{k_0^2}{4\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{1+4i\alpha\beta t}\left[\alpha x^2 - ik_0 x + i\beta k_0^2 t\right]$$

$$= \frac{1}{1+4i\alpha\beta t}\left[\alpha x^2 - ik_0 x + i\beta k_0^2 t\right]$$

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1+4i\alpha\beta t}} \exp\left[-\frac{\alpha x^2 - ik_0 x + i\beta k_0^2 t}{1+4i\alpha\beta t}\right]$$

Das ist genau die auf 1 normierte Wellenfunktion von H1 $\boxed{1}$

Dort haben wir gesehen, daß $\hbar k_0 = p_0$ der Impuls des Teilchens $\boxed{1}$ in dem Sinne ist, daß sich der Ortserwartungswert gemäß

$$\langle x\rangle(t) = \frac{\hbar k_0}{m} t = \frac{p_0}{m} t \quad \text{bewegt} \qquad \boxed{1}$$

(2) Es ist $\Delta k(t) = \Delta k(0) = \sqrt{\alpha} = \text{const}$, also

$$\Delta p(t) = \hbar\sqrt{\alpha}$$

Mit H1 d) finden wir

$$\Delta x(t) = \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{\Delta p^2}{m^2} t^2}$$

$$\Rightarrow \Delta x(t)\,\Delta p(t) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} + \frac{\Delta p^2}{m^2} t^2} \quad \boxed{1}$$

Zur Zeit $t=0$ ist

$$\Delta x(0)\,\Delta p(0) = \frac{\hbar}{2}$$

Später lernen wir, daß dies der minimal mögliche Wert für $\Delta x\,\Delta p$ ist:

$$\Delta x\,\Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{(Heisenbergsche Unschärferelation)}$$

Die Impulsunschärfe bleibt zeitlich konstant, weil der Impuls für ein freies Teilchen eine Erhaltungsgröße ist und folglich die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Impuls zeitunabhängig ist.

Die Anfangsimpulsunschärfe ergibt aber eine zeitlich wachsende Ortsunschärfe.