$\boxed{H5}$ (a) ⑥

$$\tilde{E}_n = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2$$

$$\tilde{\varphi}_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2b}} \cos\left(\frac{n\pi x}{4b}\right) & \text{für } n \in \{1,3,5,\dots\} \\ \sqrt{\frac{1}{2b}} \sin\left(\frac{n\pi x}{4b}\right) & \text{für } n \in \{2,4,6,\dots\}, \end{cases}$$

wie man sofort sieht, wenn man in den Ergebnissen von P6 b durch $2b$ ersetzt.

Es gilt

$$\int_{-2b}^{2b} dx\, \tilde{\varphi}_n^*(x)\, \tilde{\varphi}_{n'}(x) = \delta_{nn'}$$

$$\Rightarrow c_n = \int_{-2b}^{2b} dx\, \varphi_1(x)\, \tilde{\varphi}_n^*(x)$$

$$= \begin{cases} \int_{-b}^{b} dx \frac{1}{\sqrt{b}} \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right) \frac{1}{\sqrt{2b}} \cos\left(\frac{n\pi x}{4b}\right) = 0 \quad \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \int_{-b}^{b} dx \frac{1}{\sqrt{2}\, b} \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{4b}\right) = \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{16\sqrt{2}}{16-n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \text{für } n \neq 4 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } n = 4 \end{cases} \quad \text{falls } n \text{ gerade}$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \in \{2, 10, 18, \dots\} \\ 0 & \text{für } n \in \{\ 8, 12, \dots\} \\ -1 & \text{für } n \in \{6, 14, 22, \dots\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Psi(x, t=0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \frac{16\sqrt{2}}{16-(8k-6)^2}\, \tilde{\varphi}_{8k-6}(x)\right.$$

$$- \frac{1}{\pi} \frac{16\sqrt{2}}{16-(8r-2)^2} \tilde{\psi}_{8r-2}(x) \Big] + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\psi}_4(x) \quad (7)$$

(b) $P_n = |c_n|^2$. Da $c_n = 0$ für $n \in \{1, 3, \dots\}$ ist

$$P_{E_1} = 0.$$

(c)
$$\langle E \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \tilde{E}_n + \tilde{E}_4 c_4^2$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \tilde{E}_{4r-2} \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{16\sqrt{2}}{16-(4r-2)^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \tilde{E}_4$$

$$= \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{1}{2b} \right)^2 \sum_{r=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2 \cdot 16^2 (4r-2)^2}{[16-(4r-2)^2]^2}} + \frac{1}{2} \tilde{E}_4$$

$$\Rightarrow \frac{16^2 \cdot 8 \cdot (2r-1)^2}{[16 - 4(2r-1)^2]^2} = \frac{128\,(2r-1)^2}{[(2r-1)^2-4]^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4\hbar^2}{mb^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(4r-2)^2}{[(2r-1)^2-4]^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{4mb^2}$$

$$\tilde{E}_4 = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{4\pi^2}{b^2} = \frac{\hbar^2}{2mb^2}$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mb^2} = E_1$$

Da am Teilchen beim Wände-Auseinanderschieben keine Arbeit verrichtet wird, bleibt die mittlere Energie erhalten.

H6

$$\psi''(x) = [u(x) - \varepsilon]\,\psi(x)$$

$$u = \frac{2m}{\hbar^2} V \; ; \quad \varepsilon = \frac{2m}{\hbar^2} E$$

$$\psi''(x) = -[u_0\,\delta(x) + \varepsilon]\,\psi(x) \qquad (H6.1)$$

Lösungen für $\varepsilon < 0$

Für $x \neq 0$:

$$\psi''(x) = \underbrace{-\varepsilon}_{>0}\,\psi(x)$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \begin{cases} A \exp(\varkappa x) & \text{für } x < 0 \\ A' \exp(-\varkappa x) & \text{für } x > 0 \end{cases} \; ; \quad \varkappa = \sqrt{-\varepsilon}$$

Worin der eingearbeitet wurde, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = 1$$

erfüllbar sein muß.

Da erst ψ'' singulär ist, muß $\psi(x)$ stetig bei 0 sein

$\Rightarrow A = A'$

Es muß weiter wegen Integral $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx$ (H6.1)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)] = -u_0\,\psi(0)$$

$$= -u_0 A$$

$$\Rightarrow \psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -u_0 A \Rightarrow \varkappa = \frac{u_0}{2}$$

$$\Rightarrow -2A\varkappa = -u_0 A$$

$$\Rightarrow \varepsilon = -\varkappa^2 = -\frac{u_0^2}{4} = -\frac{1}{\cancel{4}}\left(\frac{\cancel{2}mV_0}{\hbar^2}\right)^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E$$

$$= -\frac{m^2 V_0^2}{\hbar^4} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{m V_0^2}{2\hbar^2}}$$

Es gibt genau einen geb. Zustand und die Eigenfunktion ist

$$\psi_1(x) = A \exp(-\varkappa |x|)$$

Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi_1(x)|^2 = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-2\varkappa|x|)$$

$$= 2|A|^2 \int_0^{\infty} dx \exp(-2\varkappa x) = \frac{|A|^2}{\varkappa} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow |A|^2 = \varkappa = \frac{u_0}{2} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{u_0}{2}}}$$

(b) $$\psi(x) = \begin{cases} A \exp(ikx) + B \exp(-ikx);\ x<0 \\ A' \exp(ikx) + B' \exp(-ikx);\ x>0 \end{cases} \qquad k = \sqrt{E} > 0$$

Stetigkeit: $\psi(0^+) = \psi(0^-)$

$$A + B = A' + B' \quad (\text{HG}.2)$$

$\Rightarrow$ Sprung für ψ': $\psi'(0^+) - \psi'(0^-) \stackrel{!}{=} -u_0\, \psi(0) = -u_0(A+B)$

$$ik(A' - B') - ik(A - B) = -u_0(A+B) \quad (\text{HG}.3)$$

Gerade Parität!

$B' = A$; $A' = B$ $\Rightarrow$ (HG.2) erfüllt

$$\Rightarrow ik(B - A) - ik(A - B) = 2ik(A - B) = -u_0(A+B)$$

$$\Rightarrow (u_0 + 2ik) A = -(u_0 - 2ik) B$$

$$\Rightarrow \quad B = -\frac{u_0 + 2ik}{u_0 - 2ik} A$$

$$\psi_g(x) = \begin{cases} A\left[\exp(ikx) - \dfrac{u_0+2ik}{u_0-2ik}\exp(-ikx)\right] & ; x<0 \\ A\left[-\dfrac{u_0+2ik}{u_0-2ik}\exp(ikx) + \exp(-ikx)\right] & ; x>0 \end{cases} \qquad (10)$$

Ungerade Parität

$B' = -A \; ; \; A' = -B$

$\overset{H6.2}{\Longrightarrow} A+B = -(A+B) \Rightarrow \boxed{A+B=0} \Rightarrow A = -B$

$ik(-B+A) - ik(A-B) \overset{(H6.3)}{=} 0$ ✓

$$\Rightarrow \psi_u(x) = \begin{cases} A\left[\exp(ikx) - \exp(-ikx)\right] & ; x<0 \\ A\left[\exp(ikx) - \exp(-ikx)\right] & ; x<0 \end{cases}$$

$$= A\left[\exp(+ikx) - \exp(-ikx)\right]$$

$$=$$

Zusatz zu H5