Greenscher Satz

Ausgangspunkt: Gaußscher IS:

$$\int_V d^3\vec{x}\, \mathrm{div}\,\vec{A} = \int_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{A}$$

$d\vec{S}$ muß aus V heraus zeigen und das $\perp$ zu ∂V

Greensche Sätze folgen für spezielle $\vec{A}$:

$$\vec{A} = \psi(\vec{x})\,\vec{\nabla}\varphi(\vec{x})$$

$$A^i = \psi\,\partial^i\varphi \Rightarrow \partial_i A^i = (\partial_i\psi)(\partial^i\varphi) + \psi\,\partial_i\partial^i\varphi$$

Euklidischer $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = (\vec{\nabla}\psi)(\vec{\nabla}\varphi) + \psi\,\Delta\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_V d^3\vec{x}\,\left[(\vec{\nabla}\psi)(\vec{\nabla}\varphi) + \psi\,\Delta\varphi\right] = \int_{\partial V} d\vec{S}\,\psi\,\vec{\nabla}\varphi}$$

1. Greenscher Satz

Der zweite Greensche Satz folgt durch Antisymmetrisieren:

$$\vec{A} = \psi\,\vec{\nabla}\varphi - \varphi\,\vec{\nabla}\psi$$

$$\overset{1.\,GS}{\Rightarrow} \boxed{\int_V d^3\vec{x}\,\left[\psi\,\Delta\varphi - \varphi\,\Delta\psi\right] = \int_{\partial V} d\vec{S}\,(\psi\,\vec{\nabla}\varphi - \varphi\,\vec{\nabla}\psi)}$$

2. Greenscher Satz

Anwendung (Beispiel)

Greensche Funktion für Δ:

$$\Delta_x G(\vec{x}', \vec{x}) := \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Verwende
$$\varphi(\vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{x}')$$
in 2. GS:

$$\int_V d^3\vec{x} \, [\psi(\vec{x}) \underbrace{\Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}', \vec{x})}_{\delta(\vec{x}-\vec{x}')} - G(\vec{x}', \vec{x}) \Delta_{\vec{x}} \varphi(\vec{x})] =$$
$$= \int_{\partial V} d\vec{S} \, [\psi(\vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} G(\vec{x}', \vec{x}) - G(\vec{x}', \vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} \psi(\vec{x})]$$

$$\Rightarrow \psi(\vec{x}') = \int_V d^3\vec{x} \; G(\vec{x}', \vec{x}) \, \Delta \varphi(\vec{x})$$
$$+ \int_{\partial V} d\vec{S} \, [\psi(\vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} G(\vec{x}', \vec{x}) + G(\vec{x}', \vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} \psi(\vec{x})] \quad (*)$$

Angenommen, man will Poissongl.
$$\Delta_{\vec{x}'} \psi(\vec{x}') = \rho(\vec{x}')$$
mit ρ gegeben berechnen. Dann gibt es zwei Grundtypen von Randbedingungen:

(a) $\psi(\vec{x}')\Big|_{\vec{x}\in\partial V} = R(\vec{x}')$ (Dirichlet-Problem)

(b) $\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \psi(\vec{x}') \cdot \vec{n}(\vec{x}')\Big|_{\vec{x}'\in\partial V} = \tilde{R}(\vec{x}')$ (Neumann-Problem)

Hat man dann GF's mit RB:
$$G_d(\vec{x}', \vec{x})\Big|_{\vec{x}\in\partial V} = 0 \quad \text{(für (a))}$$
$$\vec{n}(\vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} G_n(\vec{x}', \vec{x})\Big|_{\vec{x}\in\partial V} = 0$$ (für (b)), ergibt sich sofort die Lösung des Anfangswertproblems.