Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Wintersemester 2013/2014**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Blatt 12 (03.02.-07.02.2014)

Präsenzübungen

(P27) Viererimpuls und relativistisches Electron im Plattenkondensator

Es sei durch $\vec{x}(t)$ eine beliebige Trajektorie eines relativistischen Teilchens gegeben. Im folgenden sei $\underline{x}$ der Vierervektor

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \mathrm{i}ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \mathrm{i}ct \end{pmatrix} \tag{1}$$

im Minkowski-Raum und

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = \vec{x} \cdot \vec{y} - c^2 t_x t_y \tag{2}$$

das Skalarprodukt im Minkowskiraum

(a) Zeigen Sie, daß für eine physikalisch realisierbare Bewegung

$$\mathrm{d}\tau^2 = -\frac{1}{c^2} \mathrm{d}\underline{x} \cdot \mathrm{d}\underline{x} = -\frac{\mathrm{d}t^2}{c^2} \frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} > 0 \tag{3}$$

gilt und daß $\mathrm{d}\tau$ das Zeitinkrement im momentanen Ruhsystem des Teilchens ist. Argumentieren Sie, warum $\mathrm{d}\tau$ invariant unter Lorentz-Transformationen ist.

(b) Der Viererimpuls des Teilchens ist durch

$$\underline{p} = m \frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}\tau} \tag{4}$$

definiert, wobei m die Ruhemasse des Teilchens ist. Argumentieren Sie, warum $\underline{p}$ sich unter Lorentz-Transformationen wie ein Vierervektor verhält und drücken Sie $\underline{p}$ durch die Geschwindigkeit $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t$ aus. Diskutieren Sie die physikalische Bedeutung der vierten Komponente p_4, indem Sie $\underline{p}$ für kleine Geschwindigkeiten mit den entsprechenden nichtrelativistischen Größen vergleichen.

(c) Zeigen Sie, daß

$$\underline{p} \cdot \underline{p} = -m^2 c^2 = \text{const} \tag{5}$$

ist.

(d) Die Bewegungsgleichung eines Elektrons in einem elektromagnetischen Feld lautet wie in der Newtonschen Mechanik

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \tag{6}$$

Berechnen Sie die Bewegungsgleichung für p_4, indem Sie (5) nach t ableiten. Was ist die physikalische Bedeutung dieser Gleichung?

(e) Betrachten Sie nun den Vierervektor $\underline{p}$ als Funktion der Eigenzeit τ und zeigen Sie, daß seine Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{q}{mc}(-\mathrm{i}\vec{E}p_4 - c\vec{B}\times\vec{p}) \\ \frac{\mathrm{d}p_4}{\mathrm{d}\tau} &= \mathrm{i}\frac{q}{mc}\vec{E}\cdot\vec{p} \end{aligned} \tag{7}$$

lautet.

(f) Lösen Sie die Bewegungsgleichung (7) für $\underline{p}(\tau)$ für den Fall eines konstanten elektrischen Feldes, also für $\vec{B}=0$. Nehmen Sie dabei an, daß $\vec{E}=E\vec{e}_3$ ist und daß zur Eigenzeit $\tau=0$ die Anfangsbedingung $\vec{p}=p_0\vec{e}_1$ gilt.

Hinweis: Leiten Sie die Bewegungsgleichung für p_3 nach τ ab, verwenden Sie die Bewegungsgleichung für p_4 und lösen Sie zunächst die entstehende Differentialgleichung für p_3. Die Integrationskonstanten bestimmen sich dann eindeutig aus der Anfangsbedingung und (5).

(g) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und zeigen Sie, daß stets $|\vec{v}|<c$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie dazu zuerst, daß

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}c\frac{\vec{p}}{p_4} \tag{8}$$

(h) Berechnen Sie auch $\underline{x}(\tau)$ mit der Anfangsbedingung $\underline{x}(0)=0$ und vergleichen Sie dies mit dem Resultat im nichtrelativistischen Limes (wobei man natürlich annehmen muß, daß $|\vec{v}|\ll c$ ist, d.h. dieser Limes ergibt sich unter der Annahme, daß $|p_0|\ll mc$ und für Eigenzeiten τ, so daß $|qE\tau/(mc)|\ll 1$ ist).

Auf diesem Blatt gibt es keine Hausübungen!